

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Les centres analytique et elliptique d'un polytope et leurs applications aux problèmes d'optimisation convexe

LEDOUX, Mireille

Award date:
1994

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Facultés Universitaires Notre-Dame de La Paix
Namur
Faculté des Sciences

Les Centres Analytique et Elliptique
d'un Polytope et leurs Applications
aux Problèmes d'Optimisation Convexe

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
mathématiques
par

Mireille LEDOUX

Promoteur : J.-J. STRODIOT

Année académique 1993-1994

Je remercie Monsieur le Professeur Jean-Jacques Strodiot pour son aide précieuse et son aimable collaboration tout au long de ce mémoire.

Que toutes les personnes qui ont également participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail en soient très sincèrement remerciées.

Je remercie vivement mes parents qui m'ont soutenue et encouragée durant mes années d'études.

Les Centres Analytique et Elliptique d'un Polytope et leurs Applications aux Problèmes d'Optimisation Convexe

LEDOUX Mireille

Résumé

Dans ce mémoire, nous considérons le problème de la minimisation d'une fonction convexe sur un ensemble \mathcal{F} convexe, compact dont l'intérieur est non vide. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une méthode de plans sécants dont le principe est le suivant: à chaque itération, on réduit l'ensemble admissible sans éliminer de solutions en effectuant des coupes. Ces coupes se font au moyen d'hyperplans construits à partir de la fonction objectif et du "centre" de la partie considérée. Plusieurs définitions de centre d'une partie convexe compacte de \mathbb{R}^n sont introduites et étudiées : le centre elliptique, le centre sphérique et le centre analytique avec ou sans poids.

Abstract

In this work, we consider the problem of minimizing a convex function on a convex, compact body \mathcal{F} whose interior is not empty. For solving this problem, we use a central cutting plane method whose principle is : at each iteration, the feasible set is reduced without eliminating solutions by making cuts. These cuts use hyperplanes build on the objective function and the "center" of the considered part. We give and study several definitions of the center of a convex, compact set of \mathbb{R}^n : the elliptic center, the spherical center and the weighted and unweighted analytic center.

Mémoire de licence en Sciences Mathématiques.

Juin 1994.

Unité d'optimisation.

Promoteur : **J.-J. STRODIOT**

Errata

Page 8

Notons cet ellipsoïde par $E(a, X)$.

Page 13

Nous avons donc l'existence d'un maximum c.-à-d. l'existence d'un couple (x, X) qui soit tel que $E(x, X)$ soit un ellipsoïde contenant Q et de volume minimal.

Page 21

$$B_1^{(m+1)} \subseteq Q' \subseteq B_{R'}^{(m+1)} \text{ avec } R' = \sqrt{R^2 + 1}$$

Page 26

Comme cette dernière inégalité peut s'écrire

$$c_L^T b_{k+1} + c_L^T A_k^{1/2} z \leq 1 \quad \forall z \quad \|z\| \leq 1, \quad L=1, \dots, m$$

Page 41

Or

$$(s - \bar{s})^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} (s - \bar{s}) = (x - \bar{x})^T A^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} A (x - \bar{x})$$

Page 44

Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode de Newton avec recherche linéaire c.-à-d. qu'à chaque itération, nous trouvons une direction de montée \hat{p} de f au point courant noté de nouveau x_0 .

Page 45

Calcul de la direction \hat{p} au point courant x_0 .

Page 52

La stratégie est alors de choisir pour itéré suivant un γ -centre x_1 de Loc_1 .

Etant donnés x_k et Loc_k , construire

$\text{Loc}_{k+1} = \text{Loc}_k \cap \{x \in G \mid (x - x_k)^T \nabla F(x_k) \leq 0\}$
et calculer x_{k+1} un γ -centre de Loc_{k+1} .

Remarque pour la page 57

L'ellipsoïde E^* dont il est question (obtenu au moyen d'une dilatation de la boule unité par un facteur de $\sqrt{1+\alpha^2}$ le long de la direction α) n'est pas (nécessairement) l'ellipsoïde maximal pour k .

Page 64

Pomme $x^* \in G^k$, $\exists x^*, \bar{x}_k \in \text{int } G^k$,

alors il existe $\bar{x}_{k+1} \in \mathbb{J}[x^*, \bar{x}_k]$ vérifiant

$b^T \bar{x}_{k+1} > z^{k+1}$ (sinon, il y a contradiction avec $b^T x^* > z^{k+1}$)

La dernière inégalité provient du fait que quel soit k , nous pouvons trouver $\bar{x}_k \in G^k$ vérifiant

$$g(\bar{x}_k, \pm) < 0 \quad \forall \pm \in S.$$

Page 73

De plus,

$$r^k \leq \bar{E}^k \leq \frac{1-\bar{\omega}}{\bar{\omega}} r^k$$

où r^k est le plus petit axe de l'ellipsoïde E_{in} .

Table des matières

Introduction	5
1 Le centre elliptique et le centre sphérique	7
1.1 Ellipsoïde	8
1.2 Ellipsoïdes maximal et minimal	9
1.3 Définitions	13
1.4 Equivalence des problèmes de recherche des ellipsoïdes	14
1.5 Propriété commune aux polytopes à intérieur non vide Q	19
1.6 Comment trouver un γ -centre ?	22
1.7 L'algorithme ElliP	24
1.8 Convergence de l'algorithme ElliP	24
1.9 Le centre sphérique	30
1.9.1 Définition	30
1.9.2 Propriétés	31
1.9.3 Comment trouver un centre sphérique de P ?	31
2 Le centre analytique avec ou sans poids	33
2.1 Définition	33
2.2 Propriétés	34
2.3 Le centre analytique	41
2.3.1 Définition	41
2.3.2 Propriétés	42
2.4 Comment trouver le centre analytique ?	43
2.4.1 Présentation du problème	43
2.4.2 Algorithme	45
2.4.3 Justification de l'algorithme	45
2.4.4 Calcul du nombre d'opérations	47
3 Application des centres dans les problèmes d'optimisation convexe	51
3.1 La méthode des ellipsoïdes inscrits	51

3.2	Convergence de la méthode des ellipsoïdes inscrits	52
3.3	Calcul du nombre d'itérations pour atteindre une précision donnée	59
3.4	La programmation semi-infinie convexe	60
3.4.1	Description du problème	60
3.4.2	Algorithme général	61
3.4.3	Théorèmes	64
3.5	Cas particuliers. Les autres algorithmes.	72
Conclusion		75

Introduction

Dans ce mémoire, nous considérons le problème de la minimisation d'une fonction f convexe sur un ensemble \mathcal{F} convexe, compact dont l'intérieur est non vide. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une méthode de plans sécants dont le principe est le suivant: à chaque itération, nous réduisons l'ensemble admissible sans éliminer de solutions en effectuant des coupes. Ces coupes se font au moyen d'hyperplans construits à partir de la fonction objectif et du "centre" de la partie considérée. Plusieurs définitions de centre d'une partie convexe compacte de \mathbb{R}^n ont été introduites dans la littérature: le centre elliptique, le centre sphérique et le centre analytique avec ou sans poids.

Dans le chapitre 1, nous définissons le centre elliptique et le centre sphérique et nous démontrons leurs propriétés principales. Nous présentons un algorithme permettant de trouver le γ -centre d'un corps convexe $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ et nous en prouvons la convergence.

Dans le chapitre 2, nous considérons le centre analytique avec ou sans poids; nous établissons leurs propriétés et présentons un algorithme de recherche du centre analytique.

Dans le chapitre 3, nous étudions, tout d'abord, la méthode des ellipsoïdes inscrits afin de résoudre le problème

$$\begin{cases} \min & F(x) \\ \text{s.c.} & x \in G \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe de classe C^1
 $G \subset \mathbb{R}^n$ est un corps convexe.

Nous en démontrons la convergence et calculons le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée ϵ .

Nous appliquons, ensuite, la méthode (décrite ci-dessus) au problème de programmation semi-infinie convexe

$$(P) \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & g(x, t) \leq 0, t \in S \\ & x \in G \end{cases}$$

$$\text{où } \mathcal{F} = \{x \in G \mid g(x, t) \leq 0, t \in S\}$$

sur lequel nous fixons les hypothèses suivantes:

- H.1 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.
- H.2 S compact, non vide dans \mathbb{R}^m .
- H.3 $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$
 $g(., t)$ convexe pour tout t
 et continûment différentiable sur G
- H.4 G est un sous-ensemble compact, convexe
 et à intérieur non vide de \mathbb{R}^n
- H.5 $\exists \hat{x} \in \text{int}G$ tel que $g(\hat{x}, t) < 0 \ \forall t \in S$
 et qui n'est pas optimal pour le problème (P) ,
 point auquel on fait référence en parlant de point de Slater.

Pour résoudre ce problème, nous présentons un algorithme général permettant d'utiliser chacun des centres introduits précédemment. Nous en prouvons la convergence et ensuite, nous montrons que cet algorithme peut être utilisé avec chacun des centres.

Pour terminer, nous tirons les conclusions du travail ainsi que les différents points qu'il resterait à approfondir.

Chapitre 1

Le centre elliptique et le centre sphérique

Soit un polytope à intérieur non vide défini par

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq b\} \quad (1.1)$$

où C est une matrice de dimension $m \times n$, $m \geq n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Nous considérons, dans ce cadre, deux types de centres :

- le centre elliptique et le centre sphérique
- le centre analytique avec ou sans poids.

Dans ce premier chapitre, nous présentons d'abord le centre elliptique d'un corps convexe Q de \mathbb{R}^n c'est-à-dire d'une partie convexe, fermée, bornée à intérieur non vide de \mathbb{R}^n . Un polytope de la forme (1.1) est un exemple de corps convexe. Ensuite, nous étudions le centre sphérique d'un polytope de la forme (1.1).

Pour des raisons numériques, nous y introduisons également une notion de centre elliptique approché appelé γ -centre. Nous donnons ensuite un algorithme permettant de trouver le γ -centre de Q et nous étudions sa convergence.

Le deuxième chapitre étudiera alors le centre analytique avec ou sans poids.

Avant de définir le centre elliptique et le centre sphérique, rappelons quelques propriétés des ellipsoïdes.

1.1 Ellipsoïde

Un ellipsoïde $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme :

$$E = \{x \mid (x - a)^T X (x - a) \leq 1\}$$

où $a \in \mathbb{R}^n$ est appelé le centre de E et X une matrice symétrique, définie positive d'ordre n .

Notons cet ellipsoïde par $E(x, X)$.

Comme X est symétrique et définie positive, X^{-1} est aussi symétrique et définie positive et nous avons

$$\exists A \text{ d'ordre } n, \text{ symétrique et définie positive telle que } X^{-1} = AA.$$

L'ellipsoïde peut alors se réécrire sous la forme

$$E = \{x \mid x = a + Az, \|z\| \leq 1\}.$$

En effet : si $x \in E$,

$$\begin{aligned} \text{alors } (x - a)^T X (x - a) &= (x - a)^T A^{-1} A^{-1} (x - a) \\ &= \|A^{-1} (x - a)\|^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Dès lors, en posant $z = A^{-1} (x - a)$, nous obtenons $x = a + Az$ avec $\|z\| \leq 1$.

Réciproquement, si $x = a + Az$ avec $\|z\| \leq 1$. Alors

$$\begin{aligned} (x - a)^T X (x - a) &= (Az)^T A^{-1} A^{-1} Az \\ &= \|z\|^2 \leq 1 \end{aligned}$$

et donc $x \in E$.

Comme a et A caractérisent l'ellipsoïde E , nous noterons, dans la suite, E par le couple (a, A) c.-à-d. $E \sim (a, A)$. L'ellipsoïde $E \sim (a, A)$ est le translaté au point a de l'image de la boule unité euclidienne $\|z\| \leq 1$ par la transformation linéaire de matrice A .

La fonction support de l'ellipsoïde $E \sim (a, A)$ peut s'exprimer comme suit

$$\begin{aligned} \sigma_E(c) &= \max_{x \in E} c^T x \\ &= \max_{\|z\| \leq 1} (c^T a + c^T Az) \\ &= c^T a + \|c^T A\| \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$.

Rappelons enfin que le volume de $E \sim (a, A)$ est donné par

$$\text{vol} E = \mu_n \det(A).$$

De façon analogue, si l'ellipsoïde est mis sous la forme $E(x, X)$, son volume est noté $V(x, X)$ et vaut

$$V(x, X) = \frac{\mu_n}{\sqrt{\det(X)}}$$

où μ_n est le volume de la boule unité euclidienne à n dimensions.

1.2 Ellipsoïdes maximal et minimal

Dans la suite, l'ellipsoïde de volume maximal contenu dans un corps convexe Q et celui de volume minimal contenant Q vont jouer un rôle important. Leur existence et unicité sont prouvées dans le théorème suivant.

Théorème 1.1

Soit Q un corps convexe dans \mathbb{R}^n . Alors

1. Parmi les ellipsoïdes E centrés en un point donné a appartenant à l'intérieur de Q et inscrits dans Q , il en existe un unique noté $E^*(a)$ de volume maximal.
2. Il existe un ellipsoïde unique de volume maximal dans Q noté E^* .
3. Parmi les ellipsoïdes centrés en un point a de l'intérieur de Q et circonscrits autour de Q , il en existe un unique noté $E_*(a)$ de volume minimal.
4. Il existe un ellipsoïde unique de volume minimal contenant Q noté E_* .

Remarque :

E^* est appelé l'ellipsoïde maximal pour Q .

E_* est appelé l'ellipsoïde minimal pour Q .

Nous ne démontrons que la partie existence des affirmations 3 et 4 du **Théorème 1.1**. Nous renvoyons le lecteur à la référence [5] pour les démonstrations.

PREUVE :

Notre problème (la recherche d'un ellipsoïde $E(x, X)$ de volume minimal contenant Q) consiste à trouver $x \in \mathbb{R}^n$ et $X = [x_{ik}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ solution du problème

$$(P) \begin{cases} \max & \det(X) \\ \text{s.c} & X \text{ symétrique, définie positive} \\ & Q \subseteq \{y \mid (y-x)^T X (y-x) \leq 1\} \end{cases}$$

Nous aurons alors un ellipsoïde $E(x, X)$ qui convient.

L'ensemble admissible de (P) est non vide. En effet, Q étant un corps convexe, Q est borné et donc

$$\exists \rho > 0 \quad Q \subseteq \rho B_1.$$

D'où, la matrice $X = \frac{1}{\rho^2} I$ et $x = 0$ vérifient les contraintes.

Comme $\det(\frac{1}{\rho^2} I) > 0$, nous pouvons remplacer (P) par le problème

$$(\tilde{P}) \begin{cases} \max & \det(X) \\ \text{s.c} & X \text{ symétrique, semi-définie positive} \\ & Q \subseteq \{y \mid (y-x)^T X (y-x) \leq 1\} \end{cases}$$

sans changer les solutions.

Montrons que l'ensemble admissible de (\tilde{P}) c.-à-d. l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \mid \begin{array}{l} X \text{ symétrique, semi-définie positive} \\ Q \subseteq \{y \mid (y-x)^T X (y-x) \leq 1\} \end{array} \}$$

est fermé, borné.

Le caractère fermé étant immédiat, montrons que \mathcal{F} est borné. Cette justification se fera en deux parties :

- $\exists r > 0 \quad \forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad \forall i \forall k \quad |x_{ik}| \leq \frac{1}{r^2},$
- $\exists \delta > 0 \quad \forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad \|x\| \leq \delta.$

1. Comme l'intérieur de Q est non vide c.-à-d. $\text{int}Q \neq \emptyset$, il existe une boule centrée en $e \in \text{int}Q$ de rayon $r > 0$ contenue dans Q . Cette boule se trouve dans tout ellipsoïde contenant Q . Ainsi, tout ellipsoïde circonscrit autour de Q contient la boule de rayon r dont le centre est celui de l'ellipsoïde, c.-à-d.

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad B(x, r) \subset E(x, X)$$

ou encore

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad \forall y \in B(x, r) \quad (y - x)^T X (y - x) \leq 1$$

ce qui est équivalent à

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad \max_{y \in B(x, r)} (y - x)^T X (y - x) \leq 1.$$

Posons $y - x = u$ et $X = [x_{ik}]$, nous obtenons alors :

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall (x, X) \in \mathcal{F}$$

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik} u_i u_k \leq 1 \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^n u_i^2 = r^2 \end{cases}$$

Dès lors,

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \forall (x, X) \in \mathcal{F},$$

$$|x_{ik}| \leq \frac{1}{r^2} \quad \forall i \quad \forall k \quad (1.2)$$

En effet: pour un couple arbitraire $(x, X) \in \mathcal{F}$, nous avons

$$\max u^T X u \leq 1, \quad \forall u \text{ vérifiant } \|u\|_2 = r.$$

Soient k et i deux indices arbitraires compris entre 1 et n .

Si

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} r e_i + \frac{\sqrt{2}}{2} r e_k$$

où e_i est le vecteur unité de \mathbb{R}^n ayant 1 comme $i^{\text{ième}}$ composante et des 0 ailleurs.

Nous avons

$$\|u\|_2 = r$$

et

$$0 \leq u^T X u = \frac{1}{2} r^2 (x_{ii} + x_{kk} + 2x_{ik}) \leq 1.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$0 \leq x_{ii} + x_{kk} + 2x_{ik} \leq \frac{2}{r^2}$$

ou encore

$$2x_{ik} \leq \frac{2}{r^2} - x_{ii} - x_{kk}.$$

Comme $x_{ii} \geq 0$ pour tout i , nous avons finalement

$$x_{ik} \leq \frac{1}{r^2}.$$

En recommençant un raisonnement analogue avec

$$u = -\frac{\sqrt{2}}{2}re_i + \frac{\sqrt{2}}{2}re_k,$$

nous obtenons :

$$-x_{ik} \leq \frac{1}{r^2}.$$

Nous en déduisons :

$$\max\{x_{ik}, -x_{ik}\} \leq \frac{1}{r^2}$$

c.-à-d.

$$|x_{ik}| \leq \frac{1}{r^2}.$$

Comme (x, X) est un couple arbitraire dans \mathcal{F} et i et k sont des indices arbitraires, nous avons (1.2).

2. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad \|x\| \leq \delta$.

Comme notre but est de rechercher un ellipsoïde de volume minimal contenant Q et vu que $Q \subseteq \rho B_1$, s.p.d.g., nous pouvons nous restreindre aux $(x, X) \in \mathcal{F}$ satisfaisant

$$V(x, X) \leq \rho^n \mu_n.$$

Or, $\forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad E(x, X) \supseteq B(x, r) \cup B(e, r)$.

Comme $E(x, X)$ est convexe, nous avons

$$\forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad E(x, X) \supseteq co(B(x, r), B(e, r))$$

et donc,

$$\forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad V(x, X) \geq vol(B_{n-1})\|x - e\| \quad (1.3)$$

où B_{n-1} représente la boule de rayon r dans \mathbb{R}^{n-1} .

Par conséquent, en passant à la limite $\|x\| \rightarrow +\infty$ dans l'expression (1.3),

$$\forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x, X) = +\infty$$

uniformément en X .

En particulier, nous avons

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad \|x\| > \delta \implies V(x, X) > \rho^n \mu_n. \quad (1.4)$$

Comme nous ne considérons que les ellipsoïdes $E(x, X)$ avec $(x, X) \in \mathcal{F}$ vérifiant $V(x, X) \leq \rho^n \mu_n$, nous pouvons écrire (1.4) sous la forme

$$\exists \delta > 0 \quad \forall (x, X) \in \mathcal{F} \quad V(x, X) \leq \rho^n \mu_n \implies \|x\| \leq \delta.$$

La thèse est alors immédiate.

Le problème (\tilde{P}) a une solution (x, X) car la fonction qui à X fait correspondre son déterminant $\det(X)$ est une fonction continue. Or, l'ensemble admissible \mathcal{F} de ce problème est un ensemble fermé et borné. D'où, nous pouvons utiliser le théorème assurant qu'une fonction continue sur un fermé borné atteint ses bornes inférieures et supérieures. Nous avons donc l'existence d'un minimum, c.-à-d. l'existence d'un couple (x, X) qui soit tel que $E(x, X)$ soit un ellipsoïde contenant Q et de volume minimal. \square

La preuve de l'existence d'un ellipsoïde $E_*(a)$ (avec $a \in \text{int}Q$) contenant Q est analogue mais il faut supprimer la partie où nous démontrons $\exists \delta > 0$ tel que $\forall (x, X) \in \mathcal{F}$ $\|x\| \leq \delta$ vu que le centre a été fixé en a . \square

1.3 Définitions

L'existence de l'ellipsoïde maximal étant garantie pour un corps convexe Q de \mathbb{R}^n , nous pouvons définir le centre elliptique de la façon suivante :

Le centre elliptique de Q est le centre de l'ellipsoïde maximal pour Q .

La recherche du centre elliptique d'un corps convexe Q n'est généralement pas aisée (raisons numériques), c'est pourquoi nous considérerons un γ -centre de Q plutôt que son centre elliptique.

En vue de cela, donnons les définitions suivantes :

Soient Q un corps convexe de \mathbb{R}^n ,

$$\gamma \in]0, 1],$$

$$a \in \text{int}Q.$$

1. Un ellipsoïde E , inscrit dans Q , est dit γ -maximal pour Q si

$$\gamma \text{vol} E^* \leq \text{vol} E \text{ où } E^* = \text{argmax}\{\text{vol} E \mid E \subseteq Q\}.$$

2. Un ellipsoïde E est dit (γ, a) -maximal pour Q si :

- E est centré en a
- $E \subseteq Q$
- $\text{vol} E \geq \gamma \text{vol} E^*(a)$ où $E^*(a)$ est l'ellipsoïde centré en a de volume maximal dans Q .

3. Un ellipsoïde E , contenant Q , est dit γ -minimal pour Q si :

$$\gamma \text{vol} E \leq \text{vol} E_* \text{ où } E_* = \text{argmin}\{\text{vol} E \mid Q \subseteq E\}.$$

4. Un ellipsoïde E est dit (γ, a) -minimal pour Q si :

- E est centré en a
- $Q \subseteq E$
- $\gamma \text{ vol} E \leq \text{vol} E_*(a)$ où $E_*(a)$ est l'ellipsoïde centré en a de volume minimal contenant Q .

Un γ -centre de Q est alors le centre d'un ellipsoïde γ -maximal pour Q .

Remarquons que le centre elliptique est un γ -centre de Q , quelle que soit la valeur de γ dans l'intervalle $]0, 1]$.

1.4 Equivalence des problèmes de recherche des ellipsoïdes

Dans cette partie, nous allons montrer que les problèmes de recherche d'ellipsoïdes γ -maximaux, (γ, a) -maximaux, γ -minimaux et (γ, a) -minimaux ne sont pas indépendants les uns des autres lorsque le corps convexe Q est un polytope.

Pour cela, considérons les quatre problèmes suivants :

Problème $I(n, m, \gamma)$:

Etant donnés $\gamma \in]0, 1[$ et un polytope à intérieur non vide Q dans \mathbb{R}^n défini par m inégalités linéaires

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, m\} \quad (1.5)$$

trouver un ellipsoïde γ -maximal pour Q .

Problème $I_0(n, m, \gamma)$: (version "centrée" de I)

Trouver un ellipsoïde $(\gamma, 0)$ -maximal pour (1.5).

Problème $C(n, m, \gamma)$:

Etant donnés $\gamma \in]0, 1[$ et un polytope à intérieur non vide Q contenant 0 comme point intérieur, défini comme l'enveloppe convexe de m points dans \mathbb{R}^n

$$Q = \text{co}\{d_1, \dots, d_m\} \quad (1.6)$$

trouver un ellipsoïde γ -minimal pour Q .

Problème $C_0(n, m, \gamma)$: (version "centrée" de C)

Trouver un ellipsoïde $(\gamma, 0)$ -minimal pour (1.6).

Comme Q défini par (1.5) ou par (1.6) est un corps convexe, tous ces problèmes ont un sens grâce au **Théorème 1.1**.

Si P_1 et P_2 sont deux des problèmes parmi les quatre définis ci-dessus, nous écrivons $P_1 \implies P_2$ pour dire que le problème P_1 peut se ramener à la résolution d'un problème du type P_2 .

Proposition 1.1

Nous avons les relations suivantes

$$C \iff C_0 \iff I_0 \implies I.$$

PREUVE :

Etablissons la réduction $C_0(n, m, \gamma) \implies C(n, 2m, \gamma)$ c.-à-d. la résolution du problème C_0 peut se ramener à celle d'un problème de type C .

Pour déterminer un ellipsoïde $(\gamma, 0)$ -minimal pour (1.6), il suffit de trouver un ellipsoïde E γ -minimal pour le polytope

$$Q_{\pm} = co\{\pm d_1, \dots, \pm d_m\}$$

et translater E de sorte que son centre soit à l'origine.

En effet:

Soit E un ellipsoïde γ -minimal pour Q_{\pm} et notons $\tilde{E} = \frac{1}{2} (E + (-E))$ le translaté de E ayant son centre à l'origine.

Remarquons que \tilde{E} a même volume que E .

Montrons que \tilde{E} est solution du problème $C_0(n, m, \gamma)$ c.-à-d. que \tilde{E} est $(\gamma, 0)$ -minimal pour Q .

1) L'ellipsoïde \tilde{E} contient Q .

Comme Q_{\pm} est symétrique par rapport à l'origine et comme $E \supseteq Q_{\pm}$, nous avons $E \supseteq -Q_{\pm}$ et donc $-E \supseteq Q_{\pm}$.

Dès lors, $\tilde{E} = \frac{1}{2}(E + (-E)) \supseteq Q_{\pm} \supseteq Q$.

2) $\gamma \text{vol} \tilde{E} \leq \text{vol} \bar{E}_*(0)$ où $\bar{E}_*(0)$ est l'ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant Q .

Comme $\text{vol} \tilde{E} = \text{vol} E$ et comme E est γ -minimal pour Q_{\pm} , nous avons

$$\gamma \text{vol} \tilde{E} = \gamma \text{vol} E \leq \text{vol} E_* \leq \text{vol} E_*(0)$$

où E_* est l'ellipsoïde de volume minimal contenant Q_{\pm} et $E_*(0)$ l'ellipsoïde de centre 0 de volume minimal contenant Q_{\pm} .

La preuve sera terminée si nous montrons que $\text{vol} E_*(0) \leq \text{vol} \bar{E}_*(0)$.

Comme $\bar{E}_*(0)$ est un ellipsoïde centré en 0 contenant Q , il contient Q_{\pm} et par conséquent, par définition de $E_*(0)$, nous obtenons

$$\text{vol} E_*(0) \leq \text{vol} \bar{E}_*(0).$$

La réduction $C(n, m, \gamma) \implies C_0(n+1, 2m, \gamma)$ étant technique, nous renvoyons le lecteur à la référence [8].

Le problème C est ainsi équivalent au problème C_0 .

L'équivalence $I_0(n, m, \gamma) \iff C_0(n, m, \gamma)$ est basée sur des arguments de polarité.

Montrons que si E est un ellipsoïde centré en 0 de la forme $E = \{Az \mid \|z\| \leq 1\}$ avec A symétrique, définie positive et si $Q = \text{co}\{c_1, \dots, c_m\}$ avec $0 \in \text{int} Q$, alors

$$E \text{ est } (\gamma, 0)\text{-maximal pour } Q^0 \iff E^0 \text{ est } (\gamma, 0)\text{-minimal pour } Q. \quad (1.7)$$

Avant de montrer cette équivalence remarquons que

$$Q^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, m\}$$

et

$$E^0 = \{A^{-1}z \mid \|z\| \leq 1\}.$$

La première égalité découle de la définition de la polaire. Pour obtenir la seconde, observons d'abord que

$$\begin{aligned} t \in E^0 &\iff \forall x \in E \quad x^T t \leq 1 \\ &\iff \forall z \text{ tel que } \|z\| \leq 1 \quad z^T A t \leq 1 \\ &\iff \|A t\| \leq 1. \end{aligned}$$

Dès lors, la seconde égalité est vérifiée car

$$t \in E^0 \implies t = A^{-1}At \in \{A^{-1}z \mid \|z\| \leq 1\}.$$

et

$$\begin{aligned} t \in \{A^{-1}z \mid \|z\| \leq 1\} &\implies \|At\| \leq 1 \\ &\implies t \in E^0. \end{aligned}$$

D'autre part, Q étant convexe fermé, nous avons $Q^{00} = Q$ et par conséquent,

$$E \subseteq Q^0 \iff Q \subseteq E^0.$$

De cette équivalence, nous déduisons que si $E^*(0) \sim (0, B)$ est l'ellipsoïde centré en 0 de volume maximal dans Q^0 alors $[E^*(0)]^0$ est l'ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant Q .

En effet, soit $E_1 \sim (0, C)$ un ellipsoïde centré en 0 contenant Q .

Alors $E_1^0 \subseteq Q^0$ et donc $\text{vol} E_1^0 \leq \text{vol} E^*(0)$ c.-à-d. $\det(C^{-1}) \leq \det(B)$.

Mais alors $\det(C) \geq \det(B^{-1})$ et $\text{vol} E_1 \geq \text{vol}[E^*(0)]^0$.

Pour déterminer l'équivalence (1.7), il reste donc à prouver que

$$\text{vol} E \geq \gamma \text{vol} E^*(0) \iff \gamma \text{vol} E^0 \leq \text{vol}[E^*(0)]^0.$$

Mais ceci est immédiat car

$$\det(A) \geq \gamma \det(B) \iff \frac{\gamma}{\det(A)} \leq \frac{1}{\det(B)}$$

les matrices A et B étant définies positives.

Nous déduisons alors très facilement l'équivalence entre les problèmes I_0 et C_0 .

La dernière réduction à établir est celle entre le problème I_0 et le problème I c.-à-d.

$$I_0(n, m, \gamma) \implies I(n, 2m, \gamma).$$

En effet :

Pour trouver un ellipsoïde $(\gamma, 0)$ -maximal E pour

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, m\},$$

nous pouvons calculer un ellipsoïde γ -maximal E^\pm pour le polytope symétrique par rapport au centre

$$Q^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm c_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, m\}$$

et translater E^\pm vers l'origine.

Pour le voir, considérons E^\pm un ellipsoïde γ -maximal pour Q^\pm c.-à-d. tel que $E^\pm \subseteq Q^\pm$ et

$$\text{vol} E^\pm \geq \gamma \text{vol} E^{\pm*} \quad (1.8)$$

avec $E^{\pm*}$ l'ellipsoïde de volume maximal dans Q^\pm .

Comme Q^\pm est symétrique par rapport à l'origine, l'ensemble

$$E = \frac{1}{2}(E^\pm + (-E^\pm))$$

est un ellipsoïde centré en 0, de même volume que E^\pm et contenu dans Q^\pm , E convient car E est $(\gamma, 0)$ -maximal pour Q .

En effet :

- E est centré en 0.
- $E \subseteq Q$ car $E \subseteq Q^\pm \subseteq Q$.
- Montrons que $\gamma \text{vol} E^*(0) \leq \text{vol} E$ où $E^*(0)$ est l'ellipsoïde centré en 0 de volume maximal dans Q .

Comme $E^{\pm*}$ est de volume maximal dans Q^\pm ,

$$\bar{E} = \frac{E^{\pm*} + (-E^{\pm*})}{2}$$

est un ellipsoïde de centre 0 et de volume maximal dans Q^\pm . De plus, \bar{E} est de volume maximal dans Q quand le centre est fixé en 0.

Pour le voir, supposons, par l'absurde, que \bar{E} ne soit pas maximal dans Q (quand le centre est fixé en 0), il existe alors un ellipsoïde E^s centré en 0, contenu dans Q et dont le volume est supérieur à $\text{vol} \bar{E}$, il s'ensuit que

$$E^s \subseteq Q^\pm$$

avec

$$\text{vol} E^s > \text{vol} \bar{E}.$$

Ce qui est impossible car \bar{E} est de volume maximal dans Q^\pm . Il en découle:

$$E^*(0) = \bar{E}.$$

Et donc

$$\text{vol} E^*(0) = \text{vol} \bar{E} = \text{vol} E^{\pm*}$$

En appliquant l'hypothèse (1.8), nous obtenons :

$$\text{vol} E = \text{vol} E^\pm \geq \gamma \text{vol} E^*(0),$$

ce que nous devions démontrer. \square

Nous ne savons pas s'il existe une réduction $I \Rightarrow I_0$ semblable aux autres réductions. C'est pourquoi nous chercherons la complexité du **Problème I** car il est le plus difficile parmi les quatre.

1.5 Propriété commune aux polytopes à intérieur non vide Q

Proposition 1.2

Soit P un des problèmes C , C_0 , I , I_0 et soit Q le polytope intervenant dans le problème. Supposons que

$$B_1 \subseteq Q \subseteq B_R$$

où B_α désigne la boule euclidienne de rayon $\alpha > 0$ et de centre 0.

Si nous utilisons pour résoudre P une des implications

$$C \Leftarrow C_0 \Longleftrightarrow I_0 \Rightarrow I$$

alors le polytope \tilde{Q} intervenant dans le nouveau problème vérifie encore la condition

$$B_1 \subseteq \tilde{Q} \subseteq B_R.$$

Pour l'implication $C \Rightarrow C_0$, le rayon R devient $\sqrt{R^2 + 1}$.

PREUVE:

1) Pour la réduction $C_0 \Rightarrow C$

Nous avons, par hypothèse, que

$$B_1 \subseteq Q \subseteq B_R$$

entraîne

$$B_1 \subseteq Q^\pm \subseteq B_R$$

où Q est donné par l'expression (1.6) et $Q^\pm = co\{\pm d_1, \dots, \pm d_m\}$.

Cette implication est démontrée vu que $Q \subseteq Q^\pm$ et que B_R est symétrique.

2) Pour la réduction $I_0 \Longleftrightarrow C_0$

Nous avons

$$B_1 \subseteq Q \subseteq B_R$$

ce qui est équivalent à :

$$B_R^0 \subseteq Q^0 \subseteq B_1^0.$$

Or $B_1^0 = B_1$ et $B_R^0 = B_{\frac{1}{R}}$. Nous en déduisons :

$$B_{\frac{1}{R}} \subseteq Q^0 \subseteq B_1.$$

Appliquons la dilatation de rapport R , nous obtenons :

$$B_1 \subseteq RQ^0 \subseteq B_R.$$

Alors, au lieu de travailler par la suite avec Q , nous manipulons RQ^0 pour satisfaire l'hypothèse.

3) Pour la réduction $I_0 \implies I$

Nous avons :

$$B_1 \subseteq Q \subseteq B_R$$

où Q est donné par l'expression (1.5) et nous concluons :

$$B_1 \subseteq Q^\pm \subseteq B_R.$$

avec $Q^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pm c_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, m\}$.

En effet : Vu les définitions de Q et Q^\pm , nous avons $Q^\pm \subseteq Q$, d'où

$$Q^\pm \subseteq B_R$$

et de plus,

$$B_1 \subseteq Q^\pm$$

car soit x arbitraire dans B_1 , $-x \in B_1$ et vu l'hypothèse, $x \in Q$ et $-x \in Q$, c.-à-d.

$$x \in Q^\pm.$$

Quant à la réduction $C \implies C_0$, nous ne pouvons pas garder R constant mais nous avons plutôt

$$R' = \sqrt{R^2 + 1} < 2R$$

pour le polytope

$$Q' = \text{co} \{\pm(d_1, 1), \dots, \pm(d_m, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

C.-à-d.

$$B_1^{(n)} \subseteq Q \subseteq B_R^{(n)}$$

(où $B_1^{(n)}$ représente la boule unité dans \mathbb{R}^n et où Q est donné par l'expression (1.6)) entraîne

$$B_1^{n+1} \subseteq Q' \subseteq B_{R'}^{(n+1)} \text{ avec } R' = \sqrt{R^2 + 1}.$$

En effet :

- $\forall i = 1, \dots, m, \pm(d_i, 1) \in B_{R'}^{(n+1)}$

Prenons, pour établir cette appartenance, un indice i avec $1 \leq i \leq m$,

$$\pm(d_i, 1) \in B_{R'}^{(n+1)}$$

$$\iff$$

$$\|\pm(d_i, 1)\|^2 \leq R'^2$$

et $R' = \sqrt{R^2 + 1}$ convient. (Il s'agit du plus petit R' qui convient.)

Alors pour tout $x \in Q'$, x est combinaison convexe de $\pm(d_i, 1)$, $i = 1, \dots, m$ et comme $B_{R'}^{(n+1)}$ est convexe, x appartiendra à $B_{R'}^{(n+1)}$.

D'où

$$Q' \subseteq B_{R'}^{(n+1)}.$$

- $B_1^{(n+1)} \subseteq Q'$. En effet :

– Soit $x \in B_1^{(n)}$ et $y = 1$, alors

$$(x, y) \in Q'$$

car

$$x \in B_1^{(n)} \subseteq Q.$$

Nous en déduisons, vu que $Q = \text{co}\{d_1, \dots, d_m\}$:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (d_i, 1) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \\ \text{et} \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

et nous obtenons ainsi $(x, y) = (x, 1) \in Q'$.

– Soit $x \in B_1^{(n)}$ et $y = -1$.

Alors $-x \in B_1^{(n)}$ (car $B_1^{(n)}$ est symétrique) et en appliquant le premier cas, nous obtenons

$$(-x, 1) \in Q'$$

et comme Q' est symétrique,

$$(x, y) = (x, -1) \in Q'.$$

D'où

$$B_1^{(n)} \times [-1, 1] \subseteq Q'.$$

Or

$$B_1^{(n+1)} \subseteq B_1^{(n)} \times [-1, 1].$$

Nous en concluons :

$$B_1^{(n+1)} \subseteq Q'. \quad \square$$

1.6 Comment trouver un γ -centre ?

Pour des raisons numériques, nous cherchons un γ -centre d'un corps convexe Q plutôt que son centre elliptique. Nous devons donc résoudre le **Problème I** suivant :

Etant donné $\gamma \in]0, 1[$, trouver un ellipsoïde γ -maximal pour le polytope à intérieur non vide

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, m\}. \quad (1.9)$$

Résoudre ce problème revient à chercher $E \sim (a, B)$ vérifiant

$$\text{vol} E \geq \gamma \text{vol} E^* \quad (1.10)$$

et

$$E \subseteq Q \quad (1.11)$$

avec

$$E^* \sim (a^*, B^*) \text{ l'ellipsoïde maximal pour } Q.$$

La condition (1.11) est satisfaite si et seulement si

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad c_i^T a + \|c_i^T B\| \leq 1.$$

Grâce à la section 1.1, la condition (1.10) est équivalente à

$$\mu_n \det(B) \geq \gamma \mu_n \det(B^*)$$

ou encore à

$$-\ln(\det(B)) \leq -\ln(\gamma \det(B^*))$$

c-à-d. :

$$-\ln(\det(B)) \leq -\ln(\det(B^*)) + \ln(\gamma^{-1}).$$

En d'autres termes, nous devons résoudre à $\ln(\gamma^{-1})$ près le problème convexe

$$\begin{cases} \min & f(B) = -\ln(\det(B)) \\ \text{s.c.} & c_i^T a + \|c_i^T B\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.12)$$

Posons $A = B^2$, le problème (1.12) se réécrit comme :

$$\begin{cases} \min & f(A) = -\ln(\det(A)) \\ \text{s.c.} & c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)^2, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.13)$$

En effet : Le changement de variable ne modifie pas la forme de la fonction objectif. La contrainte du problème (1.12) se réécrit :

$$\|c_i^T B\| \leq 1 - c_i^T a, \quad i = 1, \dots, m$$

c.-à-d.:

$$c_i^T B^2 c_i \leq (1 - c_i^T a)^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Comme $A = B^2$,

$$c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad \square$$

Les contraintes du problème (1.12) sont convexes tandis que les contraintes de (1.13) ne le sont pas. Cependant, pour un a fixé (soit $a = 0$), ces contraintes sont linéaires en A .

Remarque :

Quel que soit le problème à résoudre (c.-à-d. I_0 ou C_0 ou C), nous pouvons nous ramener au problème I_0 grâce aux transformations

$$C \iff C_0 \iff I_0$$

c.-à-d. à un problème de minimisation de $f(A)$ avec A sujet à des contraintes linéaires (quand a fixé ($a = 0$)).

Le **Problème I** est difficile à résoudre car si a n'est pas fixé, les contraintes sont non linéaires.

La stratégie consiste alors à réduire le problème (1.13) en un petit nombre de sous-problèmes notés $P(b)$ donnés par :

$$P(b) \begin{cases} \min & f(A) = -\ln(\det(A)) \\ \text{s.c} & c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b), \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

avec des valeurs fixées de $b \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, chaque problème $P(b)$ est un problème de minimisation de $f(A)$ avec A et a sujets à des contraintes linéaires. (Problème plus facile à résoudre que (1.13)).

Ces considérations étant faites sur la forme du problème que nous devons résoudre, il nous est possible de donner un algorithme permettant de trouver un ellipsoïde γ -maximal pour un polytope Q de la forme (1.9). Cet algorithme porte le nom d'algorithme **Ellip**.

1.7 L'algorithme Ellip

Cet algorithme permet de trouver un ellipsoïde γ -maximal pour Q où Q est de la forme (1.9), il permet ainsi de trouver son γ -centre.

PAS 0

$$\begin{aligned} \text{Poser } \delta &= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right), \\ k &= 0, \\ b_k &= b_0 = \text{un point intérieur arbitraire de } Q. \end{aligned}$$

PAS 1

Trouver une solution approximative

$$a_k = a(b_k) \text{ et } A_k = A(b_k)$$

du problème

$$P(b_k) \begin{cases} \min & f(A) = -\ln(\det(A)) \\ \text{s.c} & c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b_k), \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

avec une erreur absolue δ dans la fonction objectif.

PAS 2

$$\begin{aligned} \text{Mettre à jour } b_{k+1} &= \frac{1}{2}(a_k + b_k), \\ k &= k + 1. \end{aligned}$$

Retour au PAS 1 et recommencer une nouvelle itération.

Cet algorithme est important car il est, notamment, utilisé pour la résolution de problèmes de programmation convexe comme nous le verrons dans le chapitre 3. (la méthode des ellipsoïdes inscrits).

1.8 Convergence de l'algorithme Ellip

Avant de démontrer la convergence, introduisons une nouvelle notation,

$$\gamma(b) = \frac{\text{vol} E^*(b)}{\text{vol} E^*}. \quad (1.14)$$

Nous avons immédiatement que

$$\gamma(b) \in]0, 1] \quad \forall b \in \text{Int}Q.$$

et

$$\gamma(b) = 1 \iff b = a^*$$

où a^* est le centre de l'ellipsoïde maximal E^* de Q .

La théorème de convergence est alors le suivant.

Théorème 1.2 :

L'algorithme **Ellip** converge en au plus k itérations où k est le plus petit entier supérieur à

$$\log\left(\frac{\ln(\frac{1}{\gamma(b_0)})}{\ln(\frac{1}{\gamma})}\right) + 1.$$

L'ellipsoïde obtenu

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = b_{k+1} + A_k^{\frac{1}{2}}z, \|z\| \leq 1\}$$

est γ -maximal pour Q .

PREUVE :

Montrons que $E_k \subseteq Q$ et que E_k est γ -maximal pour Q .

1. $E_k \subseteq Q$.

Par définition de A_k , on a :

$$c_i^T A_k c_i \leq (1 - c_i^T a_k)(1 - c_i^T b_k), \quad i = 1, \dots, m \quad (1.15)$$

Or,

$$\forall a, b \in Q, (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b) \leq (1 - c_i^T (\frac{1}{2}(a + b)))^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.16)$$

En effet : Soient a et b deux éléments arbitraires dans Q et i un indice compris entre 1 et m . Alors

$$\begin{aligned} (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b) &= 1 - c_i^T(a + b) + c_i^T a c_i^T b \\ (1 - c_i^T (\frac{1}{2}(a + b)))^2 &= 1 - c_i^T(a + b) + \frac{1}{4}((a + b)^T c_i c_i^T (a + b)). \end{aligned}$$

Et par conséquent, (1.16) est vérifié si

$$2c_i^T a c_i^T b \leq a^T c_i c_i^T a + b^T c_i c_i^T b.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée car elle peut s'écrire $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ où $\alpha = c_i^T a$ et $\beta = c_i^T b$. L'inégalité (1.16) est donc bien démontrée.

Comme $a_k \in Q$ par construction de l'algorithme et
 $b_k \in Q$ car b_k est une combinaison convexe de 2 éléments a_{k-1}
et b_{k-1} de Q convexe,

nous avons, en utilisant (1.16),

$$(1 - c_i^T a_k)(1 - c_i^T b_k) \leq (1 - c_i^T (\frac{1}{2}(a_k + b_k)))^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.17)$$

Nous en déduisons grâce à (1.15)

$$c_i^T A_k c_i \leq (1 - c_i^T b_{k+1})^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

La matrice A_k étant une matrice symétrique définie positive, elle admet une racine carrée $A_k^{\frac{1}{2}}$ et nous avons :

$$\|c_i^T A_k^{\frac{1}{2}}\| \leq 1 - c_i^T b_{k+1}, \quad i = 1, \dots, m$$

ou encore

$$c_i^T b_{k+1} + \|c_i^T A_k^{\frac{1}{2}}\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.18)$$

Comme cette dernière inégalité peut s'écrire

$$c_i^T b_{k+1} + c_i^T A_k^{\frac{1}{2}} z \leq 1 \quad \forall z \quad \|z\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

l'ellipsoïde E_k est bien contenu dans Q .

2. E_k est γ -maximal pour Q .

Pour établir cela, nous considérons la fonction

$$\Phi : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\Phi(a, b) = \min\{f(A) \mid c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b), \quad i = 1, \dots, m\}$$

où $f(A) = -\ln(\det(A))$ avec A une matrice symétrique, définie positive, d'ordre n .

Nous avons :

$$\forall a, b \in Q, \quad \Phi(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b)) \leq \Phi(a, b) \leq \frac{1}{2}(\Phi(a, a) + \Phi(b, b)). \quad (1.19)$$

En effet :

Soient a et b arbitraires dans Q , par définition de Φ , nous avons

$$\Phi(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b)) = \min\{f(A) \mid c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T (\frac{1}{2}(a+b)))^2, \quad i = 1, \dots, m\}$$

et

$$\Phi(a, b) = \min\{f(A) \mid c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b), i = 1, \dots, m\}.$$

La première inégalité $\Phi(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b)) \leq \Phi(a, b)$ découle alors de (1.16).

Pour prouver $\Phi(a, b) \leq \frac{1}{2}(\Phi(a, a) + \Phi(b, b))$, nous supposons que A et B sont des matrices optimales pour (a, a) et (b, b) c.-à-d.

$$f(A) = \Phi(a, a) \text{ et } c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)^2, i = 1, \dots, m,$$

$$f(B) = \Phi(b, b) \text{ et } c_i^T B c_i \leq (1 - c_i^T b)^2, i = 1, \dots, m.$$

Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que A et B sont des matrices diagonales.

En multipliant les deux dernières inégalités, nous obtenons :

$$c_i^T (AB)^{\frac{1}{2}} c_i \leq ((c_i^T A c_i)(c_i^T B c_i))^{\frac{1}{2}} \leq (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b), i = 1, \dots, m.$$

D'où,

$$\Phi(a, b) \leq f((AB)^{\frac{1}{2}}) \quad (1.20)$$

car, par définition, $\Phi(a, b) = \min\{f(A) \mid c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b), i = 1, \dots, m\}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} f((AB)^{\frac{1}{2}}) &= -\ln(\det(AB)^{\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{2}(\ln(\det(A)) + \ln(\det(B))) \\ &= \frac{1}{2}(f(A) + f(B)) \\ &= \frac{1}{2}(\Phi(a, a) + \Phi(b, b)). \end{aligned} \quad (1.21)$$

D'où, grâce à (1.20) et (1.21), nous avons :

$$\Phi(a, b) \leq \frac{1}{2}(\Phi(a, a) + \Phi(b, b))$$

ce que nous devons démontrer.

Observons que l'inégalité

$$\Phi(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b)) \leq \Phi(a, b)$$

implique que le minimum de $\Phi(a, b)$ sur $Q \times Q$ est atteint en (a^*, a^*) et que sa valeur est

$$\begin{aligned} \min\{\Phi(a, b) \mid a, b \in Q\} &= \min\{\Phi(a, a) \mid a \in Q\} \\ &= \Phi(a^*, a^*) \\ &= f(A^*) \\ &= -2 \ln(\det(A^*))^{\frac{1}{2}} \\ &= -2 \ln(\det(A^*)^{\frac{1}{2}}) \\ &= -2 \ln(\frac{\text{vol}(E^*)}{\mu_n}) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la définition de f et l'existence de

$$E^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a^* + (A^*)^{\frac{1}{2}}z, \|z\| \leq 1\}$$

ellipsoïde maximal pour Q .

E_k est γ -maximal pour Q si et seulement si

$$\text{vol} E_k \geq \gamma \text{vol} E^*$$

avec $E^* \sim (a^*, (A^*)^{\frac{1}{2}})$. Cette dernière inégalité peut s'écrire

$$\frac{\text{vol} E^*}{\text{vol} E_k} \leq \frac{1}{\gamma}$$

ou encore

$$\ln\left(\frac{\text{vol} E^*}{\text{vol} E_k}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

Pour établir cette dernière inégalité, remarquons d'abord que :

$$\ln\left(\frac{\text{vol} E^*}{\text{vol} E_k}\right) = \frac{1}{2}(f(A_k) - f(A^*)).$$

En effet :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\text{vol} E^*}{\text{vol} E_k}\right) &= \ln(\text{vol} E^*) - \ln(\text{vol} E_k) \\ &= \ln(\det(A^*)^{\frac{1}{2}}) - \ln(\det(A_k)^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2}(f(A_k) - f(A^*)). \end{aligned}$$

Ensuite, de par la description de l'algorithme (voir PAS 1), nous avons :

$$\Phi(a_k, b_k) = f(A_k) \leq \min\{\Phi(a, b_k) \mid a \in Q\} + \delta$$

Donc, comme $b_k \in Q$,

$$f(A_k) \leq \Phi(b_k, b_k) + \delta.$$

Nous en déduisons :

$$\ln\left(\frac{\text{vol} E^*}{\text{vol} E_k}\right) \leq \frac{1}{2}(\Phi(b_k, b_k) - \Phi(a^*, a^*)) + \frac{1}{2}\delta. \quad (1.22)$$

Posons ensuite

$$\varphi_k = \Phi(b_k, b_k) - \Phi(a^*, a^*)$$

alors

$$\varphi_k = 2 \ln\left(\frac{1}{\gamma(b_k)}\right).$$

En effet :

Par la définition (1.14), $\gamma(b_k) = \frac{\text{vol}E^*(b_k)}{\text{vol}E^*}$ et donc

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{\gamma(b_k)}\right) &= \ln(\text{vol}E^*) - \ln(\text{vol}E^*(b_k)) \\ &= \ln(\det(A^*)^{\frac{1}{2}}) - \ln(\det(B_k)^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2}(f(B_k) - f(A^*)) \\ &= \frac{1}{2}(\Phi(b_k, b_k) - \Phi(a^*, a^*))\end{aligned}$$

c.-à-d.

$$\varphi_k = 2 \ln\left(\frac{1}{\gamma(b_k)}\right).$$

De la description de l'algorithme, nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \Phi(b_k, b_k) - \Phi(a^*, a^*) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}), \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1})\right) - \Phi(a^*, a^*) \\ &\leq \Phi(a_{k-1}, b_{k-1}) - \Phi(a^*, a^*).\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est obtenue vu que:

$$\forall a, b \in Q, \Phi\left(\frac{1}{2}(a + b), \frac{1}{2}(a + b)\right) \leq \Phi(a, b).$$

Comme a_{k-1} est solution approximative de $P(b_{k-1})$ où $P(b_{k-1})$ est le problème :

$$\begin{cases} \min & f(A) = -\ln(\det(A)) \\ \text{s.c} & c_i^T A c_i \leq (1 - c_i^T a)(1 - c_i^T b_{k-1}), \quad i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

nous avons aussi que a_{k-1} est solution approximative du problème $\Phi(., b_{k-1})$ sur Q .

D'où :

$$\varphi_k \leq \min\{\Phi(a, b_{k-1}) \mid a \in Q\} + \delta - \Phi(a^*, a^*)$$

et, par (1.19),

$$\begin{aligned}\varphi_k &\leq \min\left\{\frac{1}{2}(\Phi(a, a) + \Phi(b_{k-1}, b_{k-1})) \mid a \in Q\right\} + \delta - \Phi(a^*, a^*) \\ &\leq \frac{1}{2}(\Phi(b_{k-1}, b_{k-1}) - \Phi(a^*, a^*)) + \delta \\ &\leq \frac{1}{2}\varphi_{k-1} + \delta.\end{aligned}$$

Cette formule de récurrence entraîne que

$$\varphi_k < 2^{-k}\varphi_0 + 2\delta.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\varphi_k &\leq \frac{1}{2}\varphi_{k-1} + \delta \\ &\leq \frac{1}{4}\varphi_{k-2} + \delta + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \frac{1}{8}\varphi_{k-3} + \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} \\ &\leq \dots \\ &\leq 2^{-k}\varphi_0 + \delta(1 + 2^{-1} + \dots + 2^{1-k}) \\ &< 2^{-k}\varphi_0 + 2\delta\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité

$$1 + 2^{-1} + \dots + 2^{1-k} = 2 - 2^{1-k} < 2.$$

Nous en déduisons, en utilisant (1.22), que

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\text{vol}E^*}{\text{vol}E_k}\right) &\leq \frac{1}{2}(\Phi(b_k, b_k) - \Phi(a^*, a^*) + \delta) \\ &\leq \frac{1}{2}(\varphi_k + \delta) \\ &\leq \frac{1}{2^{k+1}}\varphi_0 + \frac{3\delta}{2} \\ &\leq 2^{-k} \ln\left(\frac{1}{\gamma(b_0)}\right) + \frac{3\delta}{2}. \end{aligned}$$

Comme $\delta = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)$, nous avons finalement

$$\ln\left(\frac{\text{vol}E^*}{\text{vol}E_k}\right) \leq 2^{-k} \ln\left(\frac{1}{\gamma(b_0)}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

La thèse

$$\ln\left(\frac{\text{vol}E^*}{\text{vol}E_k}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

sera alors satisfaite après k itérations où k est le plus petit entier tel que nous avons

$$2^{-k} \ln\left(\frac{1}{\gamma(b_0)}\right) \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

c.-à-d.

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{\gamma(b_0)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)} \leq 2^{k-1}.$$

Prenant le logarithme dans la base 2 des deux membres de cette inégalité, nous obtenons:

$$\log\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\gamma(b_0)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)}\right) \leq k - 1. \quad \square$$

1.9 Le centre sphérique

Terminons ce premier chapitre en définissant le centre sphérique d'un polytope P à intérieur non vide défini par m inégalités linéaires et en donnant un théorème assurant son existence ainsi que le problème qu'il faut résoudre pour le trouver.

1.9.1 Définition

Soit P un polytope défini par

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq b\}$$

avec C une matrice de dimension $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

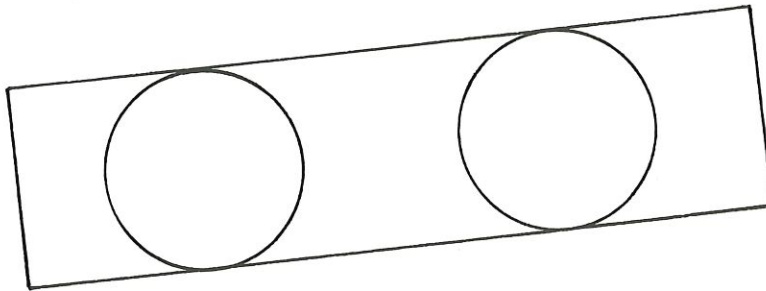
Supposons que $\text{int}P \neq \emptyset$.

Nous appelons centre sphérique de P un centre de la plus grande hypersphère qui y est inscrite.

1.9.2 Propriétés

Théorème 1.3

Le centre sphérique de P existe mais n'est pas nécessairement unique. (Il peut même en exister une infinité.)



La preuve de l'existence de la plus grande hypersphère inscrite dans P est analogue à la preuve de l'existence de E^* dans le **Théorème 1.1** mais ici, la matrice X est toujours de la forme kI où k est une constante > 0 et I la matrice unité dans $\mathbb{R}^{n \times n}$.

1.9.3 Comment trouver un centre sphérique de P ?

Il suffit, pour cela, de résoudre le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max & \sigma \\ \text{s.c.} & c_i x + \|c_i\| \sigma \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

où c_i représente la $i^{\text{ème}}$ ligne de C .

Si (x, σ) est une solution, alors x est un centre sphérique et σ le rayon de la plus grande hypersphère inscrite dans le polytope P .

Justifions la forme de ce problème linéaire.

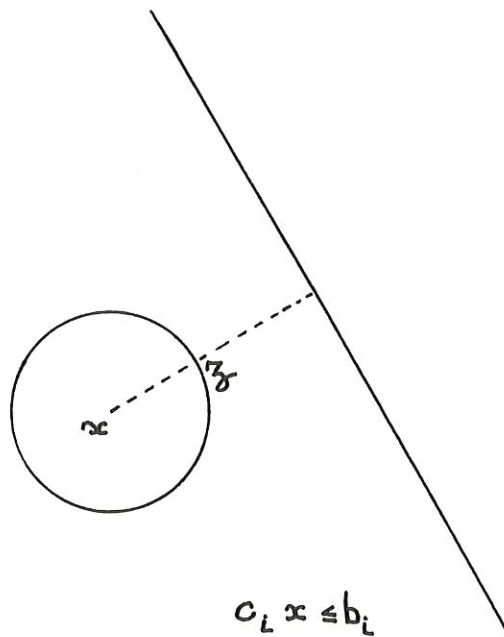
Pour cela, il suffit de remarquer que

$$B(x, \sigma) \subseteq P$$

si et seulement si

$$\text{tout } z \in B(x, \sigma) \text{ vérifie } c_i z \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

ou encore si pour tout i , le point $z = x + \sigma \frac{c_i^T}{\|c_i\|}$ vérifie $c_i z \leq b_i$.



Chapitre 2

Le centre analytique avec ou sans poids

Ce deuxième chapitre étudie le second type de centres envisagé dans ce mémoire, c.-à-d. le centre analytique avec ou sans poids. Le centre analytique avec poids est aussi appelé le ω -centre. Ils sont définis pour un polytope déterminé par m inégalités linéaires, c.-à-d. pour

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

avec A une matrice de dimension $m \times n$, $m \geq n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Nous commençons par définir le ω -centre et nous en donnons quelques propriétés en particulier celles assurant l'existence d'ellipsoïdes intérieur et extérieur au polytope X .

Nous définissons ensuite le centre analytique de X comme cas particulier du ω -centre. Nous présentons enfin un algorithme permettant de trouver ce centre analytique et en calculons la complexité.

2.1 Définition

Soit le polytope X et soit $\omega \in \mathbb{R}^m$, $\omega > 0$ tel que $e^T \omega = 1$ avec $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Le vecteur ω est appelé le vecteur poids.

Si X est compact et $\text{int}X \neq \emptyset$,

nous dirons que \bar{x} est le ω -centre de X si \bar{x} est solution du problème (P_ω) où

$$(P_\omega) \equiv \begin{cases} \max & \sum_{i=1}^m \omega_i \ln s_i \\ \text{s.c.} & Ax + s = b \\ & s > 0 \end{cases}$$

2.2 Propriétés

La première propriété montre l'existence et l'unicité du ω -centre de X tandis que la seconde en donne une caractérisation.

Propriété 2.1.

Si X est compact et $\text{int}X \neq \emptyset$, alors le ω -centre \bar{x} existe et est unique.

PREUVE :

Notons a_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

Montrons que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^m \omega_i \ln s_i \\ &= \sum_{i=1}^m \omega_i \ln(b_i - a_i x) \end{aligned}$$

est strictement concave c.-à-d.

$\nabla^2 f(x)$ est une matrice strictement définie négative.

Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= - \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i^T}{b_i - a_i x} \\ \nabla^2 f(x) &= - \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i^T a_i}{(b_i - a_i x)^2} \end{aligned}$$

ou, sous forme matricielle,

$$\nabla^2 f(x) = -A^T W^{\frac{1}{2}} D_x^{-2} W^{\frac{1}{2}} A$$

où W est une matrice diagonale ayant comme éléments diagonaux ω_i . Ainsi, W est définie positive et $W^{\frac{1}{2}}$ existe. D_x est quant à elle une matrice diagonale dont l'élément (i, i) vaut $(b_i - a_i x)$.

Vu les hypothèses sur X , l'intérieur de X est borné et non vide et A est de rang plein.

En effet, si A n'était pas de rang plein, il existerait $z \neq 0$ tel que $Az = 0$ et donc

$$\{\hat{x} + \alpha z, \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \{x \mid Ax < b\} = \text{int}X$$

avec $\hat{x} \in \{x \mid Ax < b\}$. Ce qui n'est pas possible car $\text{int}X$ est borné.

Dès lors, la matrice $-A^T W^{\frac{1}{2}} D_x^{-2} W^{\frac{1}{2}} A$ est strictement définie négative et par conséquent, f est strictement concave.

Le maximum existe car f est une fonction continue sur une partie X compacte et il est unique car f est strictement concave. \square

Propriété 2.2.

Si X est compact et $\text{int}X \neq \emptyset$,
alors

\bar{x} est le ω -centre de X

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists \bar{s} \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$\begin{cases} A\bar{x} + \bar{s} = b \\ \bar{s} > 0 \\ \omega^T \bar{S}^{-1} A = 0 \end{cases}$$

où \bar{S} est une matrice diagonale ayant comme élément (i, i) \bar{s}_i .

PREUVE :

\bar{x} est solution du problème (P_ω) qui est :

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^m \omega_i \ln s_i \\ \text{s.c.} & Ax + s = b \\ & s > 0 \end{cases}$$

Ecrivons les conditions de Kuhn-Tucker pour ce problème.

La fonction lagrangienne =

$$L(x, s, \lambda) = - \sum_{i=1}^m \omega_i \ln s_i + \lambda^T (Ax + s - b).$$

La dérivée de la fonction lagrangienne par rapport à s s'annule c.-à-d.

$$-\bar{S}^{-1}\omega + \lambda = 0.$$

La dérivée de la fonction lagrangienne par rapport à x s'annule aussi c.-à-d.

$$\lambda^T A = 0.$$

Nous déduisons de ces deux relations que $\omega^T \bar{S}^{-1} A = 0$. Nous obtenons ainsi la thèse car les conditions de Kuhn-Tucker sont nécessaires et suffisantes vu que la fonction objectif est concave. (La concavité a été démontrée dans la preuve de la **Propriété 2.1.**) \square

Le théorème suivant indique l'existence d'ellipsoïdes (centrés en \bar{x}) intérieur et extérieur au polytope X . Ce théorème est un résultat important et sera utilisé notamment au chapitre 3.

Théorème 2.1

Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ tel que $\text{int}X \neq \emptyset$ et soit \bar{x} son ω -centre,

alors il existe un ellipsoïde intérieur

$$E_{in} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - \bar{x})^T A^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} A (x - \bar{x}) \leq \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}}\}$$

et un ellipsoïde extérieur

$$E_{out} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - \bar{x})^T A^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} A (x - \bar{x}) \leq \frac{1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}\}$$

tels que

$$E_{in} \subset X \subset E_{out}.$$

De plus

$$E_{in} - \bar{x} = \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} (E_{out} - \bar{x}).$$

En d'autres termes, l'ellipsoïde intérieur est une copie à l'échelle de l'ellipsoïde extérieur avec un facteur de $\frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}}$.

Notations : W est une matrice diagonale ayant comme élément (i, i) ω_i .

$$\bar{\omega} \doteq \min_{1 \leq i \leq m} \{\omega_i\}.$$

La preuve de ce théorème est facilitée grâce aux trois propositions suivantes :

Proposition 2.1

Soit \bar{x} le ω -centre de $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et soit $S = \{b - Ax \mid x \in X\}$.

Alors

$$S \subseteq \Delta_\omega = \{s \in \mathbb{R}^m \mid s \geq 0, \omega^T \bar{S}^{-1} s = 1\}.$$

PREUVE :

Soit $s \in S$. Montrons que $s \in \Delta_\omega$.

- $s \geq 0$ car $s \in S$.

• $\omega^T \bar{S}^{-1} s = 1$ car :

$$\begin{aligned}
\omega^T \bar{S}^{-1} s &= \omega^T \bar{S}^{-1} (b - Ax) \text{ avec } x \in X \\
&= \omega^T \bar{S}^{-1} (\bar{s} + A\bar{x} - Ax) \\
&\quad \text{par les conditions de Kuhn-Tucker (Propriété 2.2)} \\
&= \omega^T \bar{S}^{-1} \bar{s} + \omega^T \bar{S}^{-1} A(\bar{x} - x) \\
&= \omega^T \bar{S}^{-1} \bar{s} \\
&= \omega^T e \\
&= 1.
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à l'hypothèse imposée sur ω . \square

Proposition 2.2

Soit $r \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant $\omega^T r = 0$ et $r^T W r \leq \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}$.

Alors

$$\forall i = 1, \dots, m, |r_i| \leq 1.$$

PREUVE :

Il suffit de montrer :

$$\forall i = 1, \dots, m, r_i \leq 1.$$

En effet, par un raisonnement analogue, nous obtenons $-r_i \leq 1$ pour tout i car $-r_i$ vérifie aussi $\omega^T r = 0$ et $r^T W r \leq \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}$.

Considérons, pour chaque i , le problème suivant :

$$\begin{cases} \max & r_i \\ \text{s.c.} & r^T W r \leq \frac{\omega_i}{1-\omega_i} \\ & \omega^T r = 0. \end{cases}$$

La fonction lagrangienne associée étant :

$$-r_i + \alpha \left[r^T W r - \frac{\omega_i}{1-\omega_i} \right] + \beta \omega^T r$$

où α est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'inégalité et β le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'égalité.

Les conditions de Kuhn-Tucker sont alors :

$$-e_i + 2\alpha W r + \beta \omega = 0 \tag{2.1}$$

$$\alpha \left[r^T W r - \frac{\omega_i}{1-\omega_i} \right] = 0 \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\alpha &\geq 0 \\ \omega^T r &= 0 \\ r^T W r &\leq \frac{\omega_i}{1 - \omega_i}.\end{aligned}$$

La première condition étant l'annulation du lagrangien par rapport à r (e_i étant le $i^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m), la seconde étant la condition de complémentarité et les deux dernières sont les contraintes du problème.

Nous avons $\alpha > 0$.

En effet, supposons, par l'absurde, que $\alpha = 0$. L'équation (2.1) devient $e_i = \beta \omega$ et comme $\omega > 0$, nous obtenons : $\beta = 0$ ce qui est impossible car $1 = \beta \omega_i$.

L'équation (2.2) peut s'écrire :

$$r^T W r = \frac{\omega_i}{1 - \omega_i}. \quad (2.3)$$

L'équation (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \beta \omega_1 + 2\alpha \omega_1 r_1 &= 0 \\ \beta \omega_2 + 2\alpha \omega_2 r_2 &= 0 \\ \dots & \\ \beta \omega_i + 2\alpha \omega_i r_i &= 1 \\ \dots & \\ \beta \omega_m + 2\alpha \omega_m r_m &= 0. \end{cases}$$

En faisant la somme de toutes ces équations, nous obtenons :

$$\beta = 1$$

car $\sum_{i=1}^m \omega_i = e^T \omega = 1$ et $\sum_{i=1}^m \omega_i r_i = \omega^T r = 0$, par hypothèse.

L'équation (2.1) se simplifie en :

$$2\alpha W r + \omega = e_i.$$

Calculons le produit scalaire de cette dernière avec r , nous avons ainsi :

$$2\alpha r^T W r = r_i. \quad (2.4)$$

D'où, en utilisant (2.3) et (2.4),

$$r_i = 2\alpha \frac{\omega_i}{1 - \omega_i} > 0. \quad (2.5)$$

De plus, par l'équation $\omega_i + 2\alpha \omega_i r_i = 1$,

$$r_i = \frac{1 - \omega_i}{2\alpha \omega_i}$$

c.-à-d.

$$2\alpha \frac{\omega_i}{1-\omega_i} = \frac{1-\omega_i}{2\alpha\omega_i}$$

ou encore

$$\alpha = \frac{1-\omega_i}{2\omega_i}.$$

En remplaçant α par $\frac{1-\omega_i}{2\omega_i}$ dans l'équation (2.5), nous en concluons :

$$r_i = 1.$$

Par hypothèse, $\omega^T r = 0$ et

$$r^T W r \leq \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} \leq \frac{\omega_i}{1-\omega_i}$$

où la dernière inégalité est due au fait que $\bar{\omega} \leq \omega_i$.

Nous avons ainsi : $\forall i = 1, \dots, m$, $r_i \leq 1$ vu que $r_i = 1$ est solution de

$$\begin{cases} \max & r_i \\ \text{s.c.} & r^T W r \leq \frac{\omega_i}{1-\omega_i} \\ & \omega^T r = 0. \end{cases} \quad \square$$

Proposition 2.3

Soit \bar{x} le ω -centre de

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Si $s \in \mathbb{R}^m$ satisfait

$$\omega^T \bar{S}^{-1} s = 1 \tag{2.6}$$

et

$$(s - \bar{s})^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} (s - \bar{s}) \leq \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}. \tag{2.7}$$

Alors

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq s_i \leq 2\bar{s}_i.$$

PREUVE :

Soit s vérifiant (2.6) et (2.7), posons $r = \bar{S}^{-1}(s - \bar{s})$, ($\bar{s} > 0$ par la **Propriété 2.2**).

Alors, en appliquant les hypothèses,

$$\begin{aligned} r^T W r &= (s - \bar{s})^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} (s - \bar{s}) \leq \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} \\ \omega^T r &= \omega^T \bar{S}^{-1} (s - \bar{s}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer la **Proposition 2.2** et obtenir :

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad |r_i| \leq 1.$$

Or $r_i = \frac{s_i}{\bar{s}_i} - 1$, d'où

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \left| \frac{s_i}{\bar{s}_i} - 1 \right| \leq 1$$

c.-à-d.

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq s_i \leq 2\bar{s}_i. \quad \square$$

Ces trois propositions étant prouvées, démontrons à présent le **Théorème 2.1** :

– Etablissons d'abord que $X \subset E_{out}$.

On a, par la **Proposition 2.1**, $S \subseteq \Delta_\omega$ où

$$\Delta_\omega = \{s \in \mathbb{R}^m \mid s \geq 0, \omega^T \bar{S}^{-1} s = 1\}.$$

Remarquons d'abord que Δ_ω est convexe. En effet :

$\forall x, y \in \Delta_\omega$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Delta_\omega$$

car

- $\omega^T \bar{S}^{-1}(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 1$
car $\omega^T \bar{S}^{-1}x = 1$ et $\omega^T \bar{S}^{-1}y = 1$
- $\lambda x + (1 - \lambda)y \geq 0$ car $x, y \geq 0$.

D'autre part, les points extrêmes de Δ_ω sont :

$$\frac{\bar{s}_i}{\omega_i} e_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

et chacun de ces points extrêmes satisfait :

$$\left(\frac{\bar{s}_i}{\omega_i} e_i - \bar{s} \right)^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} \left(\frac{\bar{s}_i}{\omega_i} e_i - \bar{s} \right) = \frac{1 - \omega_i}{\omega_i} \leq \frac{1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}$$

où la dernière inégalité est obtenue vu la définition de $\bar{\omega}$.

Dès lors comme $S \subseteq \Delta_\omega$, tout $s \in S$ satisfait :

$$(s - \bar{s})^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} (s - \bar{s}) \leq \frac{1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}$$

car tout point de Δ_ω est combinaison convexe de ses points extrêmes.

Or $s - \bar{s} = -A(x - \bar{x})$ vu que $s \in S$, c.-à-d. $s = b - Ax$, $x \in X$ (par définition de S) et $\bar{s} \in S$ (par la **Propriété 2.2**).

Nous obtenons alors

$$(x - \bar{x})^T A^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} A(x - \bar{x}) \leq \frac{1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}$$

c.-à-d. $X \subset E_{out}$.

– Il reste à voir que $E_{in} \subset X$.

Soit $x \in E_{in}$. Montrons $x \in X$ c.-à-d. $Ax \leq b$. Posons $s = b - Ax$. Etablir la thèse revient à avoir $s \geq 0$.

Or

$$\begin{aligned} (s - \bar{s})^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} (s - \bar{s}) &= (x - \bar{x})^T A^T \bar{S}^{-1} W \bar{S}^{-1} (x - \bar{x}) \\ &\leq \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} \end{aligned}$$

où l'égalité est obtenue par la **Propriété 2.2** ($A\bar{x} + \bar{s} = b$) et par la définition de s et l'inégalité par le fait que $x \in E_{in}$.

De plus,

$$\begin{aligned} \omega^T \bar{S}^{-1} s &= \omega^T \bar{S}^{-1} (b - Ax) \\ &= \omega^T \bar{S}^{-1} (\bar{s} + A\bar{x} - Ax) \\ &= \omega^T \bar{S}^{-1} \bar{s} + \omega^T \bar{S}^{-1} A(\bar{x} - x) \\ &= \omega^T e \\ &= 1. \end{aligned}$$

Les hypothèses de la **Proposition 2.3** étant vérifiées, nous en déduisons :

$$s \geq 0 \text{ avec } s = b - Ax$$

c.-à-d. la thèse. \square

2.3 Le centre analytique

2.3.1 Définition

Si nous remplaçons dans la définition du ω -centre ω_i par $\frac{1}{m}$, $\forall i = 1, \dots, m$, le ω -centre est alors appelé le centre analytique. Plus précisément, le centre analytique \bar{x} du polytope $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^m \ln s_i \\ \text{s.c.} & Ax + s = b \\ & s > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

c.-à-d.

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i x) \\ \text{s.c.} & Ax + s = b \\ & s > 0 \end{cases}$$

où a_i représente la $i^{\text{ième}}$ ligne de A , une matrice $m \times n$ ($m \geq n$).

2.3.2 Propriétés

Propriété 2.3

Le centre analytique existe et est unique quand X est compact et $\text{int}X \neq \emptyset$.

La preuve est analogue à celle de la **Propriété 2.1.** où $\forall i = 1, \dots, m, \omega_i = \frac{1}{m}$ et $W = \frac{1}{m}I$ où I est la matrice unité de dimension $m \times m$. \square

Propriété 2.4

Si le polytope X est compact et $\text{int}X \neq \emptyset$,
alors

\bar{x} est le centre analytique de X

\iff

$\exists \bar{s} \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$\begin{cases} A\bar{x} + \bar{s} = b \\ \bar{s} > 0 \\ e^T \bar{S}^{-1} A = 0. \end{cases}$$

La preuve est analogue à celle de la **Propriété 2.2.** où $\forall i = 1, \dots, m, \omega_i = \frac{1}{m}$. \square

Théorème 2.2

Pour tout polytope compact à intérieur non vide

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

il existe deux ellipsoïdes E_{in} et E_{out} avec

$$E_{out} = (m-1)E_{in}$$

et

$$E_{in} \subseteq X \subseteq E_{out}$$

où \bar{x} est le centre analytique de X et

$$E_{in} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - \bar{x})^T A^T \bar{S}^{-2} A (x - \bar{x}) \leq \frac{m}{m-1}\}$$

$$E_{out} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - \bar{x})^T A^T \bar{S}^{-2} A (x - \bar{x}) \leq m(m-1)\}.$$

La preuve de ce théorème est semblable à celle du **Théorème 2.1** où nous avons remplacé ω_i par $\frac{1}{m}$, $\forall i = 1, \dots, m$ et d'où $\bar{\omega} = \frac{1}{m}$. \square

Propriété 2.5

Le rayon \bar{e} de la plus grande hypersphère inscrite dans X est supérieur ou égal au plus petit axe de E_{in} (noté ρ) et est inférieur ou égal au plus petit axe de E_{out} (ce plus petit axe vaut $(m-1)\rho$). C.-à-d.

$$\rho \leq \bar{e} \leq (m-1)\rho.$$

PREUVE :

L'inégalité $\rho \leq \bar{e}$ est évidente.

$\bar{e} \leq (m-1)\rho$ est vérifiée car la plus grande hypersphère inscrite dans X est contenue dans E_{out} , d'où son rayon \bar{e} est inférieur ou égal au plus petit axe de E_{out} .

2.4 Comment trouver le centre analytique ?

Tout comme dans le premier chapitre, nous avons obtenu un algorithme permettant d'obtenir le γ -centre d'un corps convexe Q de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x \leq 1, i = 1, \dots, m\}$, cherchons, ici, un algorithme permettant de trouver le centre analytique du polytope X et calculons sa complexité.

Commençons d'abord par la présentation du problème à résoudre.

2.4.1 Présentation du problème

Nous cherchons un algorithme qui résolve le problème :

$$\begin{cases} \max & F(x) = \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i x) \\ \text{s.c.} & Ax < b \end{cases}$$

Sa solution est le centre analytique de X noté \bar{x} .

Hypothèses : $x_0 \in \text{int}X = \{x \mid Ax < b\}$ avec A matrice de rang plein.

Nous posons :

$$f(x) = F(\bar{x}) - F(x)$$

où \bar{x} est le centre analytique de X .

Nous devons donc résoudre

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & Ax < b \end{cases}$$

car $\nabla F(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) = 0$ et F est concave, d'où f est convexe.

Remarque : Pour avoir F strictement concave, il faut que A soit de rang plein mais

si X est borné et $\text{int}X \neq \emptyset$, cette hypothèse est satisfaite.

Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode de Newton avec recherche linéaire c.-à-d. qu'à chaque itération, nous trouvons une direction de descente $\hat{\zeta}$ de f au point courant noté de nouveau x_0 .

Remarque :

-Cet algorithme n'exige pas la connaissance du centre analytique \bar{x} car à chaque itération, nous calculons

$$f(x_0 + t\hat{\zeta}) - f(x_0) = F(x_0) - F(x_0 + t\hat{\zeta})$$

expression où le centre analytique n'intervient pas.

-L'algorithme aurait pu se baser sur la fonction F plutôt que sur f (en fait, $-f$ est une translation de F d'un vecteur $-F(\bar{x})$) car

$$\begin{aligned} f(x_0 + t\hat{\zeta}) &= F(\bar{x}) - F(x_0 + t\hat{\zeta}) \\ &< f(x_0) \\ &\text{vu que } \hat{\zeta} \text{ est direction de descente de } f \text{ en } x_0. \\ &< F(\bar{x}) - F(x_0) \end{aligned}$$

$f(x_0 + t\hat{\zeta}) < f(x_0)$ est ainsi équivalent à $F(x_0 + t\hat{\zeta}) > F(x_0)$.

Mais l'utilisation de f facilite les démonstrations.

Supposons x_{init} (à l'intérieur de X) tel que $f(x_{init}) \leq M$ où M est fixé.

L'algorithme engendre alors une suite de points

$$z_0 = x_{init}, z_1, \dots, z_k, \dots$$

qui converge vers \bar{x} .

Le test d'arrêt choisi est $f(z_q) \leq \theta$ où $\theta \leq \frac{1}{250}$.

2.4.2 Algorithme

INITIALISATION :

$$\begin{aligned}\text{Poser } x_0 &= x_{init}, \\ z_0 &= x_{init}, \\ k &= 0.\end{aligned}$$

BOUCLE :

- Calcul de la direction ζ au point courant x_0 .

Poser

$$\eta = \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i^T}{b_i - a_i x_0},$$

$$H = \nabla^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i^T a_i}{(b_i - a_i x_0)^2}.$$

Résoudre $H\hat{\zeta} = \eta$.

- Augmentation du numéro du pas et exécution de la recherche linéaire.

$$\begin{aligned}k &= k + 1 \\ z_k &= \text{minimum de } f(x) \text{ sur la droite } x_0 + t\hat{\zeta} \text{ où } t \text{ scalaire.}\end{aligned}$$

- Mise à jour de x_0 et test d'arrêt, c.-à-d.

$$x_0 = z_k.$$

Tester si $f(z_{k-1}) - f(z_k) \geq \frac{\theta}{3}$.

Si oui, recommencer la boucle.

Sinon, STOP (c.-à-d. $f(z_k) \leq \theta$).

2.4.3 Justification de l'algorithme

Définissons, d'abord, $\psi_i(x)$ la transformation de coordonnées donnée par

$$\psi_i(x) = \frac{a_i(\bar{x} - x)}{b_i - a_i \bar{x}}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2.9)$$

et posons $\Sigma(\delta)$ l'ellipsoïde de centre \bar{x} donné par :

$$\Sigma(\delta) = \{x \mid \sum_{i=1}^m (\psi_i(x))^2 \leq \delta^2\}.$$

Nous citons maintenant trois lemmes qui seront nécessaires dans la suite, leurs démonstrations étant fort techniques, nous renvoyons le lecteur à la référence [4].

Lemme 2.1

Soit δ un paramètre vérifiant $0 < \delta < 0.7$,
 ϵ un paramètre vérifiant $0 < \epsilon < 1$.

Soit r_0 défini par

$$r_0 = \begin{cases} \epsilon \sqrt{f(x_0)} & \text{si } x_0 \in \Sigma(\delta) \\ \epsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit \hat{x} le minimum de la fonction linéaire $\nabla f(x_0)^T x$ sur l'ellipsoïde $E(x_0, r_0^{-2} H)$ (c.-à-d. l'ellipsoïde d'équation $E(r_0) = \{x \mid (x - x_0)^T H (x - x_0) \leq r_0^2\}$).

Ce point satisfait les conditions suivantes :

Si $x_0 \in \Sigma(\delta)$

Alors $f(\hat{x}) \leq [1 - \epsilon \sqrt{1 - \delta} + 0.5 \epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3(1-\epsilon)}] f(x_0)$

Sinon $f(\hat{x}) - f(x_0) \leq \frac{-\delta(1-\delta)}{2(1+\delta)} \epsilon + 0.5 \epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3(1-\epsilon)}$.

En d'autres termes, le point qui minimise la fonction linéaire $\eta^T x$ sur $E(x_0, r_0^{-2} H)$ donne une bonne réduction de $f(x)$. ($\eta = \nabla f(x_0)$.)

Le lemme suivant borne la valeur maximale de $f(x)$ dans $\Sigma(\delta)$ pour $0 \leq \delta < 1$.

Lemme 2.2

Soit δ un paramètre vérifiant $0 \leq \delta < 1$. Alors la valeur maximale de $f(x)$ dans l'ellipsoïde $\Sigma(\delta)$ ne dépasse pas

$$\frac{\delta^2}{2(1-\delta)}.$$

Lemme 2.3

Soit δ un paramètre vérifiant $0 < \delta < 1$.

La valeur minimale de $\sum_{i=1}^m [\frac{1}{1+\psi_i(x)} - 1]$ sur $\{x \mid x \in X, x \notin \Sigma(\delta)\}$ est supérieure ou égale à $\frac{\delta^2}{1+\delta}$.

Cet algorithme utilise la méthode de Newton avec une recherche linéaire et un critère d'arrêt.

Proposition 2.4

Si, dans l'algorithme, l'inégalité suivante est vérifiée

$$f(z_{q-1}) - f(z_q) < \frac{\theta}{3},$$

alors l'itéré z_q est le centre analytique de X c.-à-d.

$$f(z_q) \leq \theta.$$

PREUVE :

En employant le **lemme 2.1** avec $\delta = \frac{1}{2}, \epsilon = \frac{1}{10}$, nous avons :

$$f(z_q) - f(z_{q-1}) \leq -0.002963 \text{ si } z_{q-1} \notin \Sigma(\frac{1}{2}).$$

Or, par le critère d'arrêt,

$$f(z_q) - f(z_{q-1}) > \frac{-1}{750} = -0.0013333.$$

Ces deux conditions sont donc incompatibles, nous en concluons $z_{q-1} \in \Sigma(\frac{1}{2})$.

En appliquant de nouveau le **lemme 2.1**, nous obtenons :

$$f(z_{q-1}) - f(z_q) \geq \frac{1}{3}f(z_{q-1})$$

c.-à-d.

$$f(z_{q-1}) \geq \frac{2}{3}f(z_{q-1}) \geq f(z_q). \quad (2.10)$$

Vu que

$$\frac{1}{3}f(z_{q-1}) \leq f(z_{q-1}) - f(z_q) < \frac{\theta}{3},$$

nous en déduisons $f(z_{q-1}) < \theta$ et par conséquent $f(z_q) < \theta$ en utilisant (2.10). \square

2.4.4 Calcul du nombre d'opérations

Théorème 2.3

Une borne supérieure sur le nombre total d'opérations arithmétiques de l'algorithme est donnée par :

$$O[(m n^2 + n^3)(M + \ln(\frac{1}{\theta}))].$$

PREUVE :

Durant un pas, nous calculons le gradient η , la matrice hessienne H et résolvons un système d'équations linéaires. D'où, exécuter un pas nécessite $O(mn^2 + n^3)$ opérations arithmétiques.

Pour obtenir la borne dite sur le nombre total d'opérations arithmétiques, il nous suffit de montrer une borne de $O(M + \ln(\frac{1}{\delta}))$ sur le nombre total de pas exécutés par l'algorithme. Le nombre de pas est borné supérieurement comme suit. Il nécessite $O(M)$ pas pour obtenir un point dans $\Sigma(0.3)$ car, par le **lemme 2.1**, $f(x)$ diminue d'une constante additive fixe à chaque étape aussi longtemps que le point courant est à l'extérieur de $\Sigma(0.3)$.

Soit p le numéro du pas pour lequel $z_p \in \Sigma(0.3)$ et pour $0 \leq k < p$, $z_k \notin \Sigma(0.3)$. Par le **lemme 2.2**, nous avons :

$$f(z_p) \leq 0.1$$

et pour $\forall k > p$, $f(z_k) \leq f(z_p) \leq 0.1$. Nous obtenons alors

$$\forall k > p, z_k \in \Sigma(0.5).$$

En effet : Supposons, par l'absurde, qu'il existe un indice $k > p$ satisfaisant $z_k \notin \Sigma(0.5)$.

Par le **lemme 2.3**, pour tout $x \in X$, $x \notin \Sigma(\delta)$, $0 < \delta < 1$,

nous avons :

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{1 + \psi_i(x)} - 1 \right] \geq \frac{\delta^2}{1 + \delta}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{1 + \psi_i(z_k)} - 1 \right] \geq \frac{(0.5)^2}{1.5} = 0.16...$$

c.-à-d.

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{-\psi_i(z_k)}{1 + \psi_i(z_k)} \right] \geq 0.16... \quad (2.11)$$

D'autre part

$$f(z_k) = - \sum_{i=1}^m \ln(1 + \psi_i(z_k)) \geq \sum_{i=1}^m \left[\frac{-\psi_i(z_k)}{1 + \psi_i(z_k)} \right]. \quad (2.12)$$

L'inégalité de droite provient du fait que $\forall x > -1 \quad \ln(1 + x) \leq \frac{x}{1+x}$.

Pour établir l'égalité de gauche montrons que, pour tout x ,

$$f(x) = - \sum_{i=1}^m \ln(1 + \psi_i(x)). \quad (2.13)$$

Soit x arbitraire. Par définition de f , nous avons successivement

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i \bar{x}) - \sum_{i=1}^m \ln(b_i - a_i x) \\
&= \ln(\prod_{i=1}^m (b_i - a_i \bar{x})) - \ln(\prod_{i=1}^m (b_i - a_i x)) \\
&= \ln\left(\frac{\prod_{i=1}^m (b_i - a_i \bar{x})}{\prod_{i=1}^m (b_i - a_i x)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \ln\left(\frac{b_i - a_i \bar{x}}{b_i - a_i x}\right)
\end{aligned}$$

ou encore en utilisant la définition de la transformation de coordonnées donnée par (2.9),

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \ln\left(\frac{b_i - a_i \bar{x}}{b_i - a_i x}\right) = \sum_{i=1}^m \ln\left(\frac{1}{1 + \psi_i(x)}\right)$$

c.-à-d. la relation (2.13).

Nous avons alors en utilisant (2.11) et (2.12) qu'il existe $k > p$ tel que :

$$\begin{aligned}
f(z_k) &= -\sum_{i=1}^m \ln(1 + \psi_i(z_k)) \\
&\geq \sum_{i=1}^m \left[\frac{-\psi_i(z_k)}{1 + \psi_i(z_k)} \right] \\
&\geq 0.16...
\end{aligned}$$

Mais ceci n'est pas possible car $\forall k > p$, $f(z_k) \leq 0.1$.

Par conséquent,

$$\forall k > p, z_k \in \Sigma(0.5).$$

Nous pouvons alors appliquer le **lemme 2.1** à chaque étape $k > p$ et conclure, qu'après l'itération p , $f(x)$ diminue d'une fraction fixe à chaque étape. D'où, en $O(\ln(\frac{1}{\theta}))$ étapes, $f(x)$ sera inférieur ou égal à $\frac{\theta}{3}$.

En effet, comme pour tout $k > p$, $z_k \in \Sigma(0.5)$, nous obtenons en appliquant k fois le **lemme 2.1**,

$$f(z_k) \leq \gamma^k f(z_0)$$

où

$$\gamma = 1 - \epsilon \sqrt{1 - \delta} + 0.5 \epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3(1 - \epsilon)}.$$

Montrons, maintenant que si $f(z_k) > \frac{\theta}{3}$, alors :

$$k < \frac{\ln(\frac{\theta}{3})}{\ln(\gamma)} - \frac{\ln(f(z_0))}{\ln(\gamma)}.$$

Pour cela, remarquons :

$$\frac{\theta}{3} < f(z_k) \leq \gamma^k f(z_0)$$

ou encore en appliquant le logarithme népérien,

$$\ln\left(\frac{\theta}{3}\right) < k \ln(\gamma) + \ln(f(z_0))$$

avec $\gamma < 1$ d'où $\ln(\gamma) < 0$.

Divisant les deux membres par $\ln(\gamma)$, nous obtenons :

$$k < \frac{\ln(\frac{\theta}{3})}{\ln(\gamma)} - \frac{\ln(f(z_0))}{\ln(\gamma)}.$$

Par conséquent, pour que $f(z_k) \leq \frac{\theta}{3}$ soit satisfait, il faut que :

$$k \geq \frac{\ln(\frac{\theta}{3})}{\ln(\gamma)} - \frac{\ln(f(z_0))}{\ln(\gamma)}$$

ou encore

$$k \geq \frac{\ln(\frac{3}{\theta})}{-\ln(\gamma)} - \frac{\ln(f(z_0))}{\ln(\gamma)}$$

c.-à-d.

$$k = O(\ln(\frac{1}{\theta})).$$

Le nombre total de pas est alors $O(M + \ln(\frac{1}{\theta}))$, ce qui termine la preuve. \square

Remarque :

Le calcul du ω -centre, du centre analytique de X tient compte de toutes les m contraintes définissant le polytope même si certaines d'entre elles sont redondantes. Cela est dû à la forme du problème à résoudre soit (P_ω) , soit (2.8). Ce type de centres dépend des coordonnées, de la représentation du polytope tandis que le calcul du centre elliptique, du centre sphérique ne dépend pas des contraintes redondantes.

Chapitre 3

Application des centres dans les problèmes d'optimisation convexe

Dans ce chapitre, nous considérons différents problèmes de programmation convexe dont nous donnons chaque fois un algorithme permettant de les résoudre.

Le premier problème est celui de la programmation convexe, c.-à-d. la minimisation d'une fonction convexe sur une partie convexe. Pour résoudre ce problème, nous décrivons un algorithme général que nous particularisons pour obtenir la méthode des ellipsoïdes inscrits, celle-ci faisant intervenir le γ -centre (notion introduite dans le chapitre 1).

Le second problème appartient à la programmation semi-infinie convexe. Pour le résoudre, nous développons un algorithme général et en démontrons la convergence. Cet algorithme n'utilisant pas explicitement les centres, nous le particularisons aux diverses notions de centres pour retrouver les algorithmes d'Elzinga-Moore [1], Goffin-Vial [1].

3.1 La méthode des ellipsoïdes inscrits

Considérons le problème général de programmation convexe :

$$(P) \quad \begin{cases} \min & F(x) \\ \text{s.c.} & x \in G \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe de classe C^1
 $G \subset \mathbb{R}^n$ est un corps convexe.

La méthode des ellipsoïdes inscrits est basée sur le principe suivant :
Soit $x_0 \in G$. Alors toutes les solutions de (P) se trouvent dans l'ensemble

$$Loc_1 = \{x \in G \mid (x - x_0)^T \nabla F(x_0) \leq 0\}.$$

En effet, si x^* est une solution de (P) alors comme F est une fonction convexe,

$$\nabla F(x)^T (x^* - x) \leq F(x^*) - F(x) \leq 0$$

pour tout $x \in G$ et donc $x^* \in Loc_1$.

La stratégie est alors de choisir pour itéré suivant le γ -centre x_1 de Loc_1 . On construit ensuite l'ensemble

$$Loc_2 = Loc_1 \cap \{x \in G \mid (x - x_1)^T \nabla F(x_1) \leq 0\}.$$

Cet ensemble contient encore toutes les solutions de (P) .

Une itération k de l'algorithme peut alors s'écrire :

Etant donné x_k et Loc_k , construire

$$Loc_{k+1} = Loc_k \cap \{x \in G \mid (x - x_k)^T \nabla F(x_k) \leq 0\}$$

et calculer x_{k+1} le γ -centre de Loc_{k+1} .

3.2 Convergence de la méthode des ellipsoïdes inscrits

Soit K un corps convexe.

Notons $\mu(K) = \max\{vol E \mid E \text{ est un ellipsoïde et } E \subseteq K\} = vol E^*$.

Pour montrer la convergence de la méthode des ellipsoïdes inscrits, nous allons prouver que, pour tout k , nous avons

$$\mu(Loc_{k+1}) \leq \gamma^{-2} 0.889 \mu(Loc_k). \quad (3.1)$$

Nous obtenons ainsi $\mu(Loc_k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

L'inégalité (3.1) est une conséquence immédiate du théorème suivant

Théorème 3.1

Soit K un corps convexe, $\gamma \in]0, 1]$, $g \in \mathbb{R}^n$, $g \neq 0$.

Soit a un γ -centre de K et soit $K_g = \{x \in K \mid g^T(x - a) \leq 0\}$.

Alors

$$\mu(K_g) \leq \gamma^{-2} 0.889 \mu(K).$$

PREUVE :

Nous nous limitons au cas où $\gamma = 1$ c.-à-d. le cas où a est le centre elliptique de K .

Notons E^* et E_g^* les ellipsoïdes maximaux pour K et K_g respectivement.

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que les ellipsoïdes sont réduits à leurs axes principaux, leurs centres sont opposés et que les grandeurs de leurs demi-axes sont réciproques, c.-à-d.

$$E^* = \{x \mid x = a + Bz, \|z\| \leq 1\},$$

$$E_g^* = \{x \mid x = -a + B^{-1}z, \|z\| \leq 1\}$$

où $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n) > 0$.

Alors K contient l'origine comme point intérieur vu le choix des centres et par conséquent, peut être donné par un système d'inégalités linéaires de la forme :

$$K = \{x \mid c^T x \leq 1, c \in C\}$$

où C est un système fini ou infini de vecteurs.

En effet, comme K est convexe fermé, $K^{00} = K$ et donc

$$K = \{x \mid c^T x \leq 1, \forall c \in K^0\}.$$

Il suffit donc de choisir $C = K^0$.

Comme $E^* \subseteq K$ et $E_g^* \subseteq K$, nous avons la relation suivante sur les fonctions supports correspondantes :

$$\sigma_{E^*} \leq \sigma_K \text{ et } \sigma_{E_g^*} \leq \sigma_K$$

Or, vu la forme de K , $\forall c \in C$, $\sigma_K(c) = \sup_{x \in K} c^T x = \max_{x \in K} c^T x = 1$.

Nous avons donc, $\forall c \in C$,

$$\sigma_{E^*}(c) = \max_{x \in E^*} c^T x = c^T a + \|c^T B\| \leq 1,$$

$$\sigma_{E_g^*}(c) = \max_{x \in E_g^*} c^T x = -c^T a + \|c^T B^{-1}\| \leq 1.$$

ou encore

$$\|c^T B\| \leq 1 - c^T a \tag{3.2}$$

et

$$\|c^T B^{-1}\| \leq 1 + c^T a. \quad (3.3)$$

Comme a est le centre de E^* et comme $K_g = \{x \mid x \in K, g^T(x - a) \leq 0\}$, nous avons que $a \notin \text{int}(K_g)$ et donc que $a \notin \text{int}(E_g^*)$.

Mais alors de l'expression de E_g^* , nous déduisons que

$$\|a^T B\| \geq \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

D'autre part, en additionnant (3.2) et (3.3), nous obtenons :

$$\forall c \in C, \left\| \frac{c^T(B + B^{-1})}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}(\|c^T B\| + \|c^T B^{-1}\|) \leq 1.$$

Nous pouvons donc inscrire un ellipsoïde E^+ dans K avec le centre à l'origine et comme demi-axes $\frac{b_i + b_i^{-1}}{2}$, $i = 1, \dots, n$, chacun d'eux n'étant pas moindre que 1.

E^+ s'écrit donc :

$$E^+ \sim (0, \frac{B + B^{-1}}{2})$$

c.-à-d.

$$E^+ = \left\{ \frac{B + B^{-1}}{2} z \mid \|z\| \leq 1 \right\}.$$

Or pour tout $c \in C$, nous avons

$$\sigma_{E^+}(c) = \max_{x \in E^+} c^T x = \|c^T (\frac{B + B^{-1}}{2})\| \leq 1 = \max_{x \in K} c^T x$$

par ce qui précède.

Nous en concluons :

$$E^+ \subseteq K$$

et

$$\forall i = 1, \dots, n, \frac{b_i + b_i^{-1}}{2} = \frac{b_i^2 + 1}{2b_i} \geq 1$$

car $(1 - b_i)^2 \geq 0$.

Posons $b = \max_{i=1, \dots, n} \{b_i\}$.

Nous en déduisons alors $\text{vol} E^+ \geq \mu_n \frac{b + b^{-1}}{2}$. En effet :

$$\begin{aligned} \text{vol} E^+ &= \mu_n \det\left(\frac{B + B^{-1}}{2}\right) \\ &= \mu_n \left(\prod_{i=1}^n \frac{b_i + b_i^{-1}}{2}\right) \\ &\geq \mu_n \frac{b + b^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

En outre, en multipliant (3.2) et (3.3), nous obtenons :

$$\forall c \in C, c^2 \leq 1 - (c^T a)^2$$

c.-à-d. tout $c \in C$ se trouve dans l'ellipsoïde E d'équation

$$c^2 + (c^T a)^2 \leq 1 \quad (3.5)$$

obtenu en contractant la boule unité $\|c\|^2 \leq 1$ par le facteur $\sqrt{1+a^2}$ dans la direction de a .

En effet :

Soit l'opérateur d'extension $R_\alpha(\xi)$ dans la direction notée ξ de coefficient $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned} R_\alpha(\xi) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow x + (\alpha - 1)x^T \xi \xi. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, cet opérateur s'écrit

$$R_\alpha(\xi)(x) = (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)x.$$

Si $\alpha > 1$, $R_\alpha(\xi)$ est appelé une dilatation; si $\alpha < 1$, $R_\alpha(\xi)$ est appelé une contraction.

Posons ensuite

$$\xi = \frac{a}{\|a\|}$$

et

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

dans le cas d'une contraction, et

$$\alpha = \sqrt{1+a^2}$$

dans le cas d'une dilatation.

Alors l'image de la boule unité $B = \{z \mid \|z\| \leq 1\}$ par $R_\alpha(\xi)$ est donnée par

$$R_\alpha(\xi)(B) = \{u \mid u^2 + (u^T a)^2 \leq 1\}$$

avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

En effet, montrons pour cela que:

$$\{u \mid u = (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)z, z \in B\} = \{u \mid u^2 + (u^T a)^2 \leq 1\}. \quad (3.6)$$

Etablissons, d'abord :

$$\bullet \{u \mid u = (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)z, z \in B\} \subseteq \{u \mid u^2 + (u^T a)^2 \leq 1\}.$$

En effet :

Soit $u = (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)z$ avec $z \in B$, alors

$$\begin{aligned} u^2 &= z^2 + (\alpha - 1)^2 (\xi\xi^T z)^2 + 2(\alpha - 1) (\xi^T z)^2 \\ &= z^2 + (\alpha - 1)^2 (\xi^T z)^2 + 2(\alpha - 1) (\xi^T z)^2 \\ &= z^2 + (\alpha - 1)^2 \frac{(a^T z)^2}{\|a\|^2} + 2(\alpha - 1) \frac{(a^T z)^2}{\|a\|^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u^T a &= z^T a + (\alpha - 1)(z^T \xi)(\xi^T a) \\ &= z^T a + (\alpha - 1)z^T a \\ &= \alpha z^T a. \end{aligned}$$

D'où

$$(u^T a)^2 = \alpha^2 (z^T a)^2.$$

Ainsi,

$$u^2 + (u^T a)^2 = z^2 + (z^T a)^2 \left[\frac{(\alpha - 1)^2}{\|a\|^2} + \frac{2(\alpha - 1)}{\|a\|^2} + \alpha^2 \right]$$

où

$$\frac{(\alpha - 1)^2}{\|a\|^2} + \frac{2(\alpha - 1)}{\|a\|^2} + \alpha^2 = 0$$

car $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ vu la contraction. D'où,

$$u^2 + (u^T a)^2 = z^2 \leq 1$$

car $z \in B$ par hypothèse.

$$\bullet \{u \mid u^2 + (u^T a)^2 \leq 1\} \subseteq \{u \mid u = (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)z, z \in B\}.$$

En effet:

Soit u donné vérifiant $u^2 + (u^T a)^2 \leq 1$. Montrons qu'il existe $z \in B$ tel que $u = (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)z$. Prenons

$$z = \left[I - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \xi\xi^T \right] u.$$

Ce z convient car en utilisant la formule de **Sherman-Morrison-Woodbury**, nous avons

$$z = (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)^{-1} u.$$

et

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \left[u - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \xi\xi^T u \right]^2 \\ &= u^2 + (\xi^T u)^2 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \\ &= u^2 + (a^T u)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue vu le choix de ξ et α .

L'égalité (3.6) est donc démontrée.

Montrons ensuite que K contient le polaire de l'ellipsoïde E d'équation

$$c^2 + (c^T a)^2 \leq 1$$

c.-à-d. l'ellipsoïde E^* obtenu au moyen d'une dilatation de la boule unité par un facteur de $\sqrt{1+a^2}$ le long de la direction a .

En effet : Comme

$$K = \{x \mid c^T x \leq 1, c \in C\} = C^0$$

et comme $C \subseteq E$ (voir (3.5)). Nous avons :

$$E^0 \subseteq C^0 = K.$$

Il reste à voir que $E^0 = E^*$ c.-à-d. que E^0 est obtenu au moyen d'une dilatation de la boule unité par un facteur de $\sqrt{1+a^2}$ le long de la direction a .

L'ellipsoïde E d'équation

$$c^2 + (c^T a)^2 \leq 1$$

peut grâce à (3.6) s'écrire

$$E \sim (0, I + (\alpha - 1)\xi\xi^T).$$

Dès lors

$$E^0 \sim (0, (I + (\alpha - 1)\xi\xi^T)^{-1})$$

ou encore

$$E^0 \sim (0, I - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\xi\xi^T).$$

Finalement, E^0 se met sous la forme :

$$\begin{aligned} E^0 &= \{z - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\xi^T z \xi \mid z \in B\} \\ &= R_{\frac{1}{\alpha}}(\xi)(B) \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Nous avons alors bien que $E^0 = R_{\frac{1}{\alpha}}(\xi)(B)$ est l'image de la boule unité par une dilatation de facteur $\sqrt{1+a^2}$ dans la direction a .

En particulier,

$$\text{vol} E^* = \mu_n \sqrt{1+a^2}.$$

En effet :

$$E^* = E^0 \sim (0, I - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\xi\xi^T).$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{vol} E^* &= \mu_n \det(I - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\xi\xi^T) \\ &= \frac{\mu_n}{\alpha} \\ &= \mu_n \sqrt{1+a^2}. \end{aligned}$$

Comme nous avons (3.4), il suit que:

$$a^2 b^2 \geq \frac{1}{4}$$

en prenant en compte la définition de b .

E^+ et E^* étant deux ellipsoïdes centrés en l'origine, contenus dans K , il est possible d'inscrire dans K un ellipsoïde E^s dont le centre est à l'origine et

$$\text{vol} E^s \geq \max\{\text{vol} E^+, \text{vol} E^*\}$$

car parmi tous les ellipsoïdes centrés en $a \in \text{int} K$ et inscrits dans K , il en existe un unique de volume maximal (**Théorème 1.1**).

Nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} \text{vol} E^s &\geq \mu_n \min_{0 < b < +\infty} \max\left\{\frac{b+b^{-1}}{2}, \sqrt{1 + \frac{1}{4b^2}}\right\} \\ &\geq \mu_n \frac{3}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\mu(K_g)}{\mu(K)} = \frac{\text{vol} E_g^*}{\text{vol} E^*} = \frac{\mu_n^2}{(\text{vol} E^*)^2}, \quad (3.7)$$

la dernière égalité étant obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \text{vol} E_g^* (\text{vol} E^*)^2 &= \mu_n \det(B^{-1}) (\mu_n \det(B))^2 \\ &= \mu_n^3 \det(B) \\ &= \mu_n^2 (\mu_n \det(B)) \\ &= \mu_n^2 \text{vol} E^* \end{aligned}$$

Dès lors, en appliquant la définition de E^* ,

$$\begin{aligned} \frac{\mu_n^2}{(\text{vol} E^*)^2} &\leq \frac{\mu_n^2}{(\text{vol} E^s)^2} \\ &\leq \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 \\ &\leq 0.889... \end{aligned} \quad (3.8)$$

D'où, en combinant (3.7) et (3.8), nous obtenons

$$\mu(K_g) \leq 0.889... \mu(K) \quad \square$$

3.3 Calcul du nombre d'itérations pour atteindre une précision donnée

Notons $Var_G F = \max_G F - \min_G F$, l'oscillation de la fonction F sur G et posons

$$\epsilon_k = \frac{F(x_k) - \min_G F}{Var_G F}$$

la précision relative obtenue à l'itération k .

On peut montrer (voir [2]) que l'inégalité suivant est vérifiée pour tout k :

$$\epsilon_k \leq \left[\frac{\mu(Loc_k)}{\mu(G)} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Le théorème suivant indique le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision relative inférieure à $\epsilon > 0$ donné.

Théorème 3.2

Dans la méthode des ellipsoïdes inscrits, une précision relative ϵ est obtenue à l'itération k dès que

$$k \geq 10.25... n \ln(\epsilon^{-1})$$

PREUVE :

Nous obtenons une précision relative ϵ lorsque

$$\epsilon_k \leq \epsilon.$$

c.-à-d. lorsque

$$\left[\frac{\mu(Loc_k)}{\mu(G)} \right]^{\frac{1}{n}} \leq \epsilon, \quad (3.9)$$

Remarquons que l'inégalité (3.9) est équivalente à

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{\mu(Loc_k)}{\mu(G)} \right) \leq \ln \epsilon$$

ou encore

$$\ln(\mu(Loc_k)) \leq n \ln \epsilon + \ln(\mu(G)).$$

Nous devons alors déterminer le plus petit entier k vérifiant cette dernière inégalité.

En appliquant la relation $\mu(K_g) \leq \gamma^{-2} 0.889 \mu(K)$ donnée dans le **Théorème 3.1**, nous obtenons l'inégalité

$$\mu(Loc_k) \leq \left(\frac{0.889}{\gamma^2} \right)^k \mu(G)$$

qui peut encore s'écrire en appliquant le logarithme népérien

$$\ln(\mu(Loc_k)) \leq k \ln\left(\frac{0.889}{\gamma^2}\right) + \ln(\mu(G)).$$

Par conséquent, si nous montrons que

$$k \ln\left(\frac{0.889}{\gamma^2}\right) + \ln(\mu(G)) \leq n \ln \epsilon + \ln(\mu(G))$$

est vrai, alors nous aurons

$$\ln(\mu(Loc_k)) \leq n \ln(\epsilon) + \ln(\mu(G))$$

c.-à-d.

$$\left[\frac{\mu(Loc_k)}{\mu(G)}\right]^{\frac{1}{n}} \leq \epsilon.$$

Dès lors, il suffit de déterminer le plus petit entier k satisfaisant :

$$k \ln\left(\frac{0.889}{\gamma^2}\right) \leq n \ln \epsilon.$$

Comme γ a été fixé à 0.99. Nous obtenons :

$$k \geq \frac{-n \ln \epsilon}{0.097} = 10.2503... n \ln(\epsilon^{-1}). \quad \square$$

3.4 La programmation semi-infinie convexe

Le problème que nous considérons dans la suite est un problème de programmation semi-infinie convexe. Dans un premier temps, nous décrivons le problème ainsi que les hypothèses considérées. Ensuite, nous exposons un algorithme général dont nous démontrons la convergence. Nous terminons le chapitre en particulierisant l'algorithme aux différents centres.

3.4.1 Description du problème

Le problème que nous voulons résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & g(x, t) \leq 0, t \in S \\ & x \in G \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ convexe,} \\ g & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \\ S & \subseteq \mathbb{R}^m \text{ fixé,} \\ G & \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Nous pouvons remplacer la fonction objectif par une fonction linéaire, le problème devient alors :

$$\begin{cases} \max & \varphi \\ \text{s.c.} & f(x) + \varphi \leq 0 \\ & g(x, t) \leq 0, t \in S \\ & x \in G \end{cases}$$

Nous pouvons donc supposer, sans perdre de généralité, que la fonction objectif est linéaire. Prenons $f(x) = -b^T x$ où $b \in \mathbb{R}^n$.

Le problème semi-infini qui sera alors considéré dans la suite sera le problème (P) donné par

$$(P) \quad \begin{cases} \max & b^T x \\ \text{s.c.} & g(x, t) \leq 0, t \in S \\ & x \in G \end{cases}$$

auquel nous imposons les hypothèses suivantes :

- H.1. $b \in \mathbb{R}^n$ avec $\|b\| = 1$.
- H.2. S est compact, non vide dans \mathbb{R}^m .
- H.3. G est un sous-ensemble compact, convexe et à intérieur non vide de \mathbb{R}^n .
- H.4. $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g(., t)$ est convexe $\forall t$ et continûment différentiable sur G .
- H.5. $\exists \hat{x} \in \text{int}G$ tel que $g(\hat{x}, t) < 0 \forall t \in S$ et qui n'est pas optimal pour le problème (P), point auquel nous faisons référence en parlant de point de Slater.

3.4.2 Algorithme général

Posons

$$\mathcal{F} = \{x \in G \mid g(x, t) \leq 0, t \in S\}$$

l'ensemble admissible du problème (P). Remarquons que \mathcal{F} est compact, convexe et à intérieur non vide.

Pour résoudre le problème (P), nous proposons l'algorithme général suivant :

INITIALISATION :

Soit z^1 une borne inférieure sur la valeur optimale du problème (P).

$\eta > 0$ (petit, il s'agit de la tolérance pour l'arrêt.)

$\tau^1 > 0$.

Poser $G^1 = G \cap \{x \mid b^T x \geq z^1\}$.

$k = 1$.

ETAPE PRINCIPALE :

Tant que $\tau^k > \eta$

- Choisir un point x^k et $\epsilon^k > 0$ vérifiant :

$$B(x^k, \epsilon^k) \subseteq G^k. \quad (3.10)$$

- Poser $\tau^k = b^T x^k - z^k$.

- Si $x^k \notin \mathcal{F}$.

Alors Ajouter une coupe d'admissibilité

BEGIN

Soit $t \in S$ avec $g(x^k, t) > 0$.

Poser $t = t^k$.

$$G^{k+1} = G^k \cap \{x \mid g(x^k, t^k) + \nabla_x g(x^k, t^k)^T (x - x^k) \leq 0\}.$$

$$z^{k+1} = z^k.$$

END

Sinon Ajouter une coupe sur l'objectif

BEGIN

Poser $z^{k+1} = b^T x^k$.

$$G^{k+1} = G^k \cap \{x \mid b^T x \geq z^{k+1}\}.$$

END

- Poser $k = k + 1$.

Cette méthode génère aussi bien des points admissibles que des points inadmissibles pour le problème (P). Sa convergence fera l'objet du **Théorème 3.5**. Ce théorème sera précédé de deux autres qui en faciliteront la démonstration. Cependant avant d'aborder ces théorèmes et leurs démonstrations, indiquons quelques remarques.

Remarques :

Notons x^* une solution optimale et $z^* = b^T x^*$ la valeur optimale de (P) . (x^* existe car nous avons une fonction continue sur un compact).

Montrons que $\text{int}G^k \neq \emptyset$ pour tout k . Alors il sera toujours possible de trouver x^k et $\epsilon^k > 0$ vérifiant :

$$B(x^k, \epsilon^k) \subseteq G^k.$$

Raisonnons par récurrence.

Si $k = 1$ alors, $G^1 = G \cap \{x \mid b^T x \geq z^1\}$.

Vu que x^* est solution de (P) , $x^* \in G$ et par l'hypothèse (H.5), $\hat{x} \in \text{int}G$, nous avons :

$$]x^*, \hat{x}] \subseteq \text{int}G.$$

Nous pouvons en déduire :

$$\exists \bar{x}_1 \in]x^*, \hat{x}] \text{ tel que } b^T \bar{x}_1 > z^1$$

En effet : sinon pour tout $x \in]x^*, \hat{x}]$, nous avons $b^T x \leq z^1$ et en passant à la limite $x \rightarrow x^*$,

$$b^T x^* \leq z^1$$

ce qui n'est pas possible vu que nous pouvons supposer $b^T x^* > z^1$ (sinon, l'algorithme s'arrête).

Remarquons, en outre, que $\forall t \quad g(\bar{x}_1, t) < 0$.

En effet, vu les définitions de x^* et \hat{x} , nous avons

$$g(x^*, t) \leq 0 \quad \text{et} \quad g(\hat{x}, t) < 0 \quad \forall t \in S,$$

d'où, par la convexité de $g(., t) \quad \forall t \in S$ (H.4.),

$$\forall x \in]x^*, \hat{x}] \quad \forall t \in S \quad g(x, t) < 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \exists \bar{x}_1 \in]x^*, \hat{x}] \quad \text{tel que} \quad & b^T \bar{x}_1 > z^1 \\ & g(\bar{x}_1, t) < 0 \quad \forall t \in S. \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\bar{x}_1 \in \text{int}G^1$ avec $\forall t \in S \quad g(\bar{x}_1, t) < 0$.

Soit k arbitraire, $\text{int}G^k \neq \emptyset$, notre hypothèse de récurrence.

Montrons que $\text{int}G^{k+1} \neq \emptyset$.

La définition de G^{k+1} varie selon qu'il y a eu coupe sur l'objectif ou coupe d'admissibilité, deux cas sont donc à envisager.

Premier cas : Coupe sur l'objectif.

Alors $G^{k+1} = G^k \cap \{x \mid b^T x \geq z^{k+1}\}$.

Par l'hypothèse de récurrence, nous avons l'existence de

$$\bar{x}_k \in \text{int}G^k \text{ avec } \forall t \in S \quad g(\bar{x}_k, t) < 0.$$

Comme $x^* \in G^k$, $]x^*, \bar{x}_k] \subseteq \text{int}G^k$,

alors il existe $x_{k+1}^- \in]x^*, \bar{x}_k]$ vérifiant $b^T x_{k+1}^- > z^{k+1}$ (sinon, il y a contradiction avec $b^T x^* > z^k$) et, en utilisant la convexité de $g(., t) \forall t \in S$,

$$g(x_{k+1}^-, t) < 0 \quad \forall t \in S.$$

Nous en concluons ainsi : $x_{k+1}^- \in \text{int}G^{k+1}$.

Second cas : Coupe d'admissibilité.

Alors $G^{k+1} = G^k \cap \{x \mid g(x^k, t^k) + \nabla_x g(x^k, t^k)^T (x - x^k) \leq 0\}$ et $\text{int}G^{k+1} \neq \emptyset$ car $\bar{x}_k \in \text{int}G^{k+1}$,

en effet : $\bar{x}_k \in \text{int}G^k$ et vu la convexité de $g(., t^k)$

$$g(x^k, t^k) + \nabla_x g(x^k, t^k)^T (\bar{x}_k - x^k) \leq g(\bar{x}_k, t^k) < 0.$$

La dernière égalité provient du fait que quel que soit k , nous pouvons trouver $\bar{x}_k \in G^k$ vérifiant

$$g(\bar{x}_k, t) < 0 \quad \forall t \in S. \quad \square$$

Notons $\bar{\epsilon}^k$ le rayon de la plus grande boule contenue dans G^k .

Nous avons alors $\epsilon^k \leq \bar{\epsilon}^k$.

3.4.3 Théorèmes

Théorème 3.3

Soit $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des points engendrée par l'algorithme.

Alors $\epsilon^k \rightarrow 0$ c.-à-d. les rayons des boules tendent vers 0.

PREUVE :

La suite (ϵ^k) est bornée.

Montrons que 0 est l'unique point d'accumulation de (ϵ^k) . Nous aurons alors $\epsilon^k \rightarrow 0$.

Soit $\bar{\epsilon}$ un point d'accumulation. Il existe alors une sous-suite (ϵ^{k_j}) de (ϵ^k) qui vérifie

$$\epsilon^{k_j} \rightarrow \bar{\epsilon}.$$

Supposons, par l'absurde, que $\bar{\epsilon} > 0$.

Par définition de la convergence d'une suite, nous avons :

$$\exists \hat{j} \forall j \geq \hat{j}, 0 < \frac{\bar{\epsilon}}{2} < \epsilon^{k_j}.$$

Montrons que

$$\forall l > j \geq \hat{j} \quad \|x^{k_l} - x^{k_j}\| \geq \frac{\bar{\epsilon}}{2}.$$

Soit $l > j \geq \hat{j}$.

Deux cas sont à considérer :

$$x^{k_j} \notin \mathcal{F} \text{ ou } x^{k_j} \in \mathcal{F}.$$

Premier cas : $x^{k_j} \notin \mathcal{F}$ (c.-à-d. $\exists t^{k_j} \in S, g(x^{k_j}, t^{k_j}) > 0$)

Remarquons d'abord que

$$\mathcal{F} \subseteq \{x \mid g(x^{k_j}, t^{k_j}) + \nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})^T (x - x^{k_j}) \leq 0\}.$$

En effet, tout point x de \mathcal{F} vérifie :

$$g(x^{k_j}, t^{k_j}) + \nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})^T (x - x^{k_j}) \leq g(x, t^{k_j}) \leq 0$$

où la première inégalité est obtenue grâce à la convexité de $g(., t) \forall t \in S$ (H.4.) et la seconde grâce à l'hypothèse que $x \in \mathcal{F}$.

Puisque $l > j$, nous avons, par construction de l'algorithme

$$B(x^{k_l}, \epsilon^{k_l}) \subseteq \{x \mid g(x^{k_j}, t^{k_j}) + \nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})^T (x - x^{k_j}) \leq 0\}.$$

Et donc, comme le point $x^{k_l} + \epsilon^{k_l} \frac{\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})}{\|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\|}$ appartient à la boule $B(x^{k_l}, \epsilon^{k_l})$,

$$g(x^{k_j}, t^{k_j}) + \nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})^T (x^{k_l} - x^{k_j}) + \epsilon^{k_l} \|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\| \leq 0$$

c.-à-d.

$$-g(x^{k_j}, t^{k_j}) - \nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})^T (x^{k_l} - x^{k_j}) - \epsilon^{k_l} \|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\| \geq 0$$

et vu l'hypothèse $x^{k_j} \notin \mathcal{F}$, nous avons $g(x^{k_j}, t^{k_j}) > 0$.

Nous en déduisons alors :

$$-\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})^T (x^{k_l} - x^{k_j}) - \epsilon^{k_l} \|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\| > 0.$$

Nous obtenons, en utilisant l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** :

$$\|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\| \|x^{k_l} - x^{k_j}\| - \epsilon^{k_l} \|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\| > 0$$

c.-à-d.

$$\|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\| [\|x^{k_l} - x^{k_j}\| - \epsilon^{k_l}] > 0$$

et en simplifiant par $\|\nabla_x g(x^{k_j}, t^{k_j})\|$, nous avons :

$$\|x^{k_l} - x^{k_j}\| > \epsilon^{k_l} > \frac{\bar{\epsilon}}{2} > 0.$$

Second cas : $x^{k_j} \in \mathcal{F}$

A l'étape $l(> j)$, nous choisissons un point x^{k_l} et $\epsilon^{k_l} > 0$ tel que

$$B(x^{k_l}, \epsilon^{k_l}) \subseteq \{x \mid b^T x \geq b^T x^{k_j}\}.$$

Or $x^{k_l} - \epsilon^{k_l} b$ est un point de la boule $B(x^{k_l}, \epsilon^{k_l})$, il satisfait alors :

$$b^T(x^{k_l} - \epsilon^{k_l} b) \geq b^T x^{k_j}$$

équivalent à :

$$b^T x^{k_l} - \epsilon^{k_l} \geq b^T x^{k_j}.$$

Nous en déduisons ainsi

$$\epsilon^{k_l} \leq b^T(x^{k_l} - x^{k_j}) \leq \|b\| \|x^{k_l} - x^{k_j}\| = \|x^{k_l} - x^{k_j}\|$$

où nous avons utilisé l'hypothèse $\|b\| = 1$ (H.1.) pour la dernière égalité.

Nous avons finalement $\|x^{k_l} - x^{k_j}\| \geq \epsilon^{k_l} > \frac{\bar{\epsilon}}{2} > 0$.

Dans les deux cas, nous déduisons

$$\forall l > j > \hat{j} \quad \|x^{k_l} - x^{k_j}\| > \frac{\bar{\epsilon}}{2} > 0$$

et, par construction, $x^{k_l} \in G$.

La suite (x^{k_j}) étant dans G compact (H.3.), il existe une sous-suite de (x^{k_j}) qui converge et donc qui est de Cauchy, ce qui n'est pas possible vu la conclusion obtenue dans les deux cas considérés.

Par conséquent, $\bar{\epsilon} = 0$ et la suite $\epsilon^k \rightarrow 0$. \square

Théorème 3.4

Soit $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des points engendrée par l'algorithme.

Si $\hat{x} \in \text{int}\mathcal{F}$, alors

$\exists \hat{\epsilon} > 0$ tel que

$$B(\hat{x}, \hat{\epsilon}) \subset \mathcal{F} \cap \left\{ x \mid \begin{array}{l} g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0 \\ \text{avec } k \in \mathbb{N}, t \in S \end{array} \right\}$$

PREUVE :

Vu que $\hat{x} \in \text{int}\mathcal{F}$ et que $g(\cdot, t)$ est convexe pour tout $t \in S$ (H.4), nous avons

$$\forall t \in S \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \geq g(\hat{x}, t) \geq g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{x} - x^k).$$

Par conséquent, s'il existe $t \in S$ et $k \in \mathbb{N}$ qui vérifie $\nabla_x g(x^k, t) = 0$, alors

$$\{x \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0\} = \mathbb{R}^n.$$

D'où la thèse est satisfaite car $\hat{x} \in \text{int}\mathcal{F}$, ce qui implique $\exists \hat{\epsilon} > 0$ tel que $B(\hat{x}, \hat{\epsilon}) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \cap \mathbb{R}^n$.

Nous devons donc uniquement examiner les couples $(t, k) \in S \times \mathbb{N}$ pour lesquels $\nabla_x g(x^k, t) \neq 0$.

Soit (t, k) un tel couple.

A) La boule $B(\hat{x}, \hat{\delta})$ est contenue dans $\{x \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0\}$ si le point $\hat{z} = \hat{x} + \hat{\delta} \frac{\nabla_x g(x^k, t)}{\|\nabla_x g(x^k, t)\|}$ s'y trouve.

En effet, tout point \hat{y} de $B(\hat{x}, \hat{\delta})$ vérifie

$$\nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{y} - \hat{z}) \leq 0$$

et donc, pour cet \hat{y} , nous avons :

$$\begin{aligned} g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{y} - x^k) &= g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{z} - x^k) + \nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{y} - \hat{z}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car $\hat{z} \in \{x \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0\}$ et $\nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{y} - \hat{z}) \leq 0$.

Nous en déduisons $\hat{y} \in \{x \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0\}$.

Pour que le point \hat{z} appartienne à $\{x \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0\}$, nous devons avoir : $g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{z} - x^k) \leq 0$, c.-à-d.

$$g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(\hat{x} - x^k) + \hat{\delta} \|\nabla_x g(x^k, t)\| \leq 0.$$

Comme $g(., t)$ est convexe $\forall t \in S$, cette condition sera vérifiée si :

$$g(x^k, t) + g(\hat{x}, t) - g(x^k, t) + \hat{\delta} \|\nabla_x g(x^k, t)\| \leq 0$$

c.-à-d. si

$$\hat{\delta} \leq -\frac{g(\hat{x}, t)}{\|\nabla_x g(x^k, t)\|}.$$

Posons $\hat{\epsilon}_1 = \min_{t \in S} \left[\frac{-g(\hat{x}, t)}{\max_{x \in G} \|\nabla_x g(x, t)\|} \right]$. $\hat{\epsilon}_1$ convient.

Pour le voir, il nous suffit de montrer que $\hat{\epsilon}_1 > 0$.

Mais, comme $\hat{x} \in \text{int}\mathcal{F}$, $g(\hat{x}, .)$ continue en t , $\nabla_x g$ continue en (x, t) et G compact, la fonction qui à $t \in S$ fait correspondre $\frac{-g(\hat{x}, t)}{\max_{x \in G} \|\nabla_x g(x, t)\|}$ est bien définie, continue et à valeurs strictement positives.

Par conséquent, son minimum sur la partie compacte S est atteint et a donc une valeur strictement positive.

B) La boule $B(\hat{x}, \hat{\epsilon}_2)$ est incluse dans \mathcal{F} .

En effet, par hypothèse, on a $\hat{x} \in \text{int}\mathcal{F}$. En utilisant la définition de l'intérieur, on a l'existence de $\hat{\epsilon}_2 > 0$ pour lequel $B(\hat{x}, \hat{\epsilon}_2)$ est dans \mathcal{F} .

Posons $\hat{\epsilon} = \min\{\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2\}$, on a la thèse c.-à-d.

$\exists \hat{\epsilon} > 0$ tel que

$$B(\hat{x}, \hat{\epsilon}) \subset \mathcal{F} \cap \left\{ x \mid \begin{array}{l} g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T (x - x^k) \leq 0 \\ \mid \text{ avec } k \in \mathbb{N}, t \in S \end{array} \right\} \quad \square$$

Théorème 3.5 Théorème de convergence

Soit $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des points engendrée par l'algorithme.

Si $z < z^*$ et s'il existe une constante $\bar{m} \in]0, 1]$ tel que

$$\forall k \quad \epsilon^k \geq \bar{m} \bar{\epsilon}^k$$

où $\bar{\epsilon}^k$ est le rayon de la plus grande boule inscrite dans G^k .

Alors toute valeur d'adhérence de (x^k) est une solution optimale du problème d'optimisation convexe (P) .

PREUVE :

Par construction de l'algorithme, tous les itérés x^k sont dans G compact (H.3.). Il existe donc une sous-suite convergente de (x^k) dans G . Notons encore cette sous-suite (x^k) et posons $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = \bar{x}$.

Supposons, par l'absurde, que \bar{x} n'est pas solution optimale de (P) c.-à-d.

$$\exists x^* \in \mathcal{F} \text{ tel que } b^T x^* > b^T \bar{x}.$$

Soit $\hat{x} \in \text{int}\mathcal{F}$. (le point de Slater (H.5.))

c.-à-d. $\hat{x} \in \text{int}G$ et $\forall t \in S, g(\hat{x}, t) < 0$ et $b^T \hat{x} < b^T x^*$.

Définissons

$$x(\theta) = \theta x^* + (1 - \theta)\hat{x} \text{ où } \theta \in]0, 1[.$$

Nous avons alors :

$$1) \forall 0 < \theta < 1 \quad x(\theta) \in \text{int}\mathcal{F}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} g(x(\theta), t) &= g(\theta x^* + (1 - \theta)\hat{x}, t) \\ &\leq \theta g(x^*, t) + (1 - \theta) g(\hat{x}, t) \\ &< 0 \quad \forall 0 < \theta < 1, \quad \forall t \in S \end{aligned}$$

et

$$x(\theta) \in \text{int}G.$$

$$2) \forall 0 < \theta < 1 \quad b^T x(\theta) < b^T x^*.$$

En effet :

$$\begin{aligned} b^T x(\theta) &= b^T(\theta x^* + (1 - \theta)\hat{x}) \\ &= \theta b^T x^* + (1 - \theta) b^T \hat{x}. \end{aligned}$$

Nous avons la thèse c.-à-d.

$$\theta b^T x^* + (1 - \theta) b^T \hat{x} < b^T x^*$$

$$\iff$$

$$\theta < 1.$$

Cette dernière condition est satisfaite vu le choix de l'intervalle pour θ .

$$3) b^T x(\theta) > b^T \bar{x} \quad \text{si} \quad \frac{b^T \bar{x} - b^T \hat{x}}{b^T x^* - b^T \hat{x}} < \theta < 1.$$

En effet :

$$b^T x(\theta) = \theta b^T x^* + (1 - \theta) b^T \hat{x} > b^T \bar{x}$$

$$\iff$$

$$\frac{b^T \bar{x} - b^T \hat{x}}{b^T x^* - b^T \hat{x}} < \theta < 1.$$

Par conséquent, il existe \tilde{x} avec $b^T \tilde{x} > b^T \bar{x}$ et $\tilde{x} \in \text{int}\mathcal{F}$ avec

$$i) \quad B(\tilde{x}, \tilde{\epsilon}_1) \subseteq \{x \in G \mid b^T x \geq b^T \bar{x}\}.$$

En effet :

—Il suffit, pour cela, de trouver le rayon ϵ_1 pour lequel $\tilde{z} = \tilde{x} - \epsilon_1 b$ (point de la boule $B(\tilde{x}, \epsilon_1)$) soit dans $\{x \mid b^T x \geq b^T \bar{x}\}$.

Car tout point \tilde{y} de la boule $B(\tilde{x}, \epsilon_1)$ vérifie :

$$-b^T(\tilde{y} - \tilde{z}) \leq 0$$

et donc, pour cet \tilde{y} , nous avons :

$$\begin{aligned} b^T \tilde{y} - b^T \bar{x} &= b^T(\tilde{y} - \tilde{z} + \tilde{z}) - b^T \bar{x} \\ &= b^T(\tilde{y} - \tilde{z}) + b^T \tilde{z} - b^T \bar{x} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $b^T(\tilde{y} - \tilde{z}) \geq 0$ et $b^T \tilde{z} - b^T \bar{x} \geq 0$.

Ainsi, la boule $B(\tilde{x}, \epsilon_1) \subseteq \{x \mid b^T x \geq b^T \bar{x}\}$.

Cherchons donc ϵ_1 pour que $\tilde{x} - \epsilon_1 b \in \{x \mid b^T x \geq b^T \bar{x}\}$

c.-à-d. $\epsilon_1 \leq b^T \tilde{x} - b^T \bar{x}$.

Prenons ainsi $\epsilon_1 = b^T \tilde{x} - b^T \bar{x} > 0$.

—Comme $\tilde{x} \in \text{int}\mathcal{F} \subset \text{int}G$, il existe

$$\epsilon_2 > 0 \text{ tel que } B(\tilde{x}, \epsilon_2) \subset G.$$

En posant $\tilde{\epsilon}_1 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, nous avons $B(\tilde{x}, \tilde{\epsilon}_1) \subset \{x \in G \mid b^T x \geq b^T \bar{x}\}$.

$$ii) \quad B(\tilde{x}, \tilde{\epsilon}_2) \subseteq \{x \in G \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in S\}.$$

Il suffit d'utiliser le **Théorème 3.4** puisque $\tilde{x} \in \text{int}\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F} \subseteq G$.

Posant $\epsilon = \min\{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\} > 0$, nous avons :

$$B(\tilde{x}, \epsilon) \subseteq \left\{ x \in G \mid \begin{array}{l} b^T x \geq b^T \bar{x} \\ g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T(x - x^k) \leq 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in S \end{array} \right\}$$

Montrons ensuite que $\bar{\epsilon}^{k+1} \geq \epsilon$. Par définition de $\bar{\epsilon}^{k+1}$, il nous suffit de montrer que :

$$B(\tilde{x}, \epsilon) \subseteq G^{k+1}.$$

Définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} K_0 &= \{l \leq k \mid x^l \in \mathcal{F}\}, \\ K_1 &= \{l \leq k \mid x^l \notin \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

Vu l'algorithme, $\forall l \in K_0$, $(b^T x^l)$ croissante et $b^T x^l \leq b^T \bar{x}$.

D'où

$$B(\tilde{x}, \epsilon) \subseteq \left\{ x \in G \mid \begin{array}{l} b^T x \geq b^T x^l, \quad l \in K_0 \\ g(x^l, t) + \nabla_x g(x^l, t)^T (x - x^l) \leq 0, \quad l \in K_1 \\ \text{avec } t \in S \text{ tel que } g(x^l, t) > 0 \end{array} \right\}$$

Ce dernier ensemble est noté G^{k+1} .

Nous en déduisons alors que :

$$\forall k, \epsilon^{k+1} \geq \bar{m} \bar{\epsilon}^{k+1} \geq \bar{m} \epsilon > 0$$

où nous avons utilisé l'hypothèse pour la première inégalité.

Par conséquent,

$$\forall k, \epsilon^{k+1} > 0.$$

Ce qui est en contradiction avec le fait que $\epsilon^k \rightarrow 0$. (voir **Théorème 3.3**)

D'où, \bar{x} est solution optimale du problème (P). \square

Remarque : Définissons

$$u^k = \begin{cases} x^k & \text{si } x^k \in \mathcal{F} \\ u^{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors que si $u^k \in \mathcal{F}$ alors $\forall l \geq k \quad u^l \in \mathcal{F}$.

Théorème 3.6

Soit $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des points engendrée par l'algorithme.

Si $z < z^*$ et si $\exists \bar{m} \in]0, 1]$ tel que $\forall k \quad \epsilon^k \geq \bar{m} \bar{\epsilon}^k$ où $\bar{\epsilon}^k$ est le rayon de la plus grande boule inscrite dans G^k .

Alors il existe \tilde{k} tel que $\forall k > \tilde{k}, u^k \in \mathcal{F}$.

En d'autres termes, il existe un indice à partir duquel les itérés sont tous admissibles pour le problème (P).

PREUVE :

Montrons qu' $\exists \tilde{k}$ tel que $u^{\tilde{k}} \in \mathcal{F}$. La thèse $\exists \tilde{k}$ tel que $\forall k > \tilde{k}, u^k \in \mathcal{F}$ sera alors vérifiée. (vu la remarque précédant le **Théorème 3.6**)

Supposons, par l'absurde, $\forall k u^k \notin \mathcal{F}$.

Donc, $\forall k x^k \notin \mathcal{F}$ c.-à-d. $\forall k \exists t^k \in S$ tel que $g(x^k, t^k) > 0$.

Nous ajoutons alors une coupe d'admissibilité et ensuite, nous choisissons un point x^{k+1} et $\epsilon^{k+1} > 0$ vérifiant :

$$B(x^{k+1}, \epsilon^{k+1}) \subseteq G^{k+1}.$$

Par hypothèse, nous avons : $\epsilon^{k+1} \geq \bar{m} \bar{\epsilon}^{k+1}$ avec $\bar{m} \in]0, 1]$ et $\bar{\epsilon}^{k+1}$ le rayon de la plus grande boule inscrite dans G^{k+1} .

Par l'hypothèse (H.5.), $\hat{x} \in \text{int}\mathcal{F}$. En appliquant le **Théorème 3.4**, $\exists \hat{\epsilon} > 0$ tel que

$$B(\hat{x}, \hat{\epsilon}) \subset \mathcal{F} \cap \{x \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T (x - x^k) \leq 0, k \in \mathbb{N}, t \in S\}$$

d'où

$$B(\hat{x}, \hat{\epsilon}) \subset G \cap \{x \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T (x - x^k) \leq 0, k \in \mathbb{N}, t \in S\}$$

et ainsi $B(\hat{x}, \hat{\epsilon}) \subset G^{k+1}$.

Nous obtenons alors $\forall k, \epsilon^{k+1} \geq \bar{m} \bar{\epsilon}^{k+1} \geq \bar{m} \hat{\epsilon} > 0$.

Par conséquent, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \epsilon^k > 0$ ce qui est impossible vu le **Théorème 3.3**.

D'où, $\exists \tilde{k}$ tel que $\forall k > \tilde{k}, u^k \in \mathcal{F}$. \square

3.5 Cas particuliers. Les autres algorithmes.

Ayant l'algorithme général, appliquons-le aux différents centres que nous avons défini dans le premier et deuxième chapitre, il s'agit du centre sphérique, du centre elliptique, du ω -centre et du centre analytique.

A. Algorithme 1 LE CENTRE SPHERIQUE

L'algorithme 1 est obtenu en remplaçant dans l'algorithme général (3.10) par :

- Calculer x^k le centre sphérique de G^k .
Noter $\bar{\epsilon}^k$ son rayon.

Le théorème de convergence reste valable car l'hypothèse $\exists \bar{m} \in]0, 1]$ tel que $\forall k, \epsilon^k \geq \bar{m} \bar{\epsilon}^k$ est vérifiée pour $\bar{m} = 1$.

B. Algorithme 2 LE ω -CENTRE

L'algorithme 2 est obtenu en remplaçant dans l'algorithme général (3.10) par :

- Calculer x^k le ω -centre de G^k .

Noter ρ^k le plus petit axe du plus grand ellipsoïde inscrit dans G^k centré au ω -centre.

Le théorème de convergence reste valable car il existe $\bar{m} \in]0, 1]$ tel que $\forall k, \rho^k \geq \bar{m} \bar{\epsilon}^k$.

En effet :

Nous avons montré (cfr **Théorème 2.1**) qu'il existe deux ellipsoïdes E_{in} et E_{out} qui vérifient

$$E_{in} \subset G^k \subset E_{out}$$

et

$$E_{in} - x^k = \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} (E_{out} - x^k)$$

où x^k est le ω -centre de G^k et $\bar{\omega} = \min_{i=1, \dots, m} \{\omega_i\}$.

De plus,

$$r^k \leq \epsilon^k \leq \frac{1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega}} r^k.$$

où r^k est le plus petit axe de l'ellipsoïde E_{in} .

Remarque :

La boule de plus grand rayon contenue dans G^k est dans l'ellipsoïde extérieur, d'où son rayon est plus petit ou égal au plus petit axe de l'ellipsoïde extérieur, celui-ci valant $(\frac{1 - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}) r^k$.

Il suffit de prendre $\bar{m} = \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}}$, \bar{m} convient car :

- $\frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} > 0 \iff \bar{\omega} > 0 \text{ et } 1 - \bar{\omega} > 0$.

Ces deux conditions sont vérifiées vu la définition de $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega} < 1$ car par hypothèse $e^T \omega = 1$ avec $\omega > 0$ d'où $\bar{\omega} < \sum_{i=1}^m \omega_i = 1$.

- $\frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} \leq 1 \iff \bar{\omega} \leq 1 - \bar{\omega}$.

Cette dernière condition est satisfaite car $\bar{\omega} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$ si $m \geq 2$.

C. Algorithme 3 LE CENTRE ANALYTIQUE

L'algorithme 3 est obtenu en remplaçant dans l'algorithme général (3.10) par :

- Calculer x^k le centre analytique de G^k .
Noter ρ^k le plus petit axe du plus grand ellipsoïde inscrit dans G^k centré au centre analytique.

Le théorème de convergence reste valable en choisissant $\bar{m} = \frac{1}{m-1}$. (Ce résultat est obtenu à partir du **Théorème 2.2.**)

D. Algorithme 4 LE CENTRE ELLIPTIQUE

L'algorithme 4 est obtenu en remplaçant dans l'algorithme général (3.10) par :

- Calculer x^k le centre elliptique de G^k .
Noter ρ^k le plus petit axe de l'ellipsoïde maximal inscrit dans G^k .

Le théorème de convergence reste valable en choisissant $\bar{m} = \frac{1}{n}$.

En effet, en vertu du théorème III [5], nous avons $\rho^k \leq \bar{\epsilon}^k \leq n\rho^k$.

Remarque :

1. Ces méthodes de plan sécant peuvent être appliquées à des problèmes convexes non différentiables. (Les sous-gradients remplacent les gradients.)
2. L'**algorithme 1** a été présenté par Kortanek et No dans [6].
L'**algorithme 1** et l'**algorithme 3** ont été étudiés par Elzinga-Moore et Goffin-Vial respectivement [1] lorsque le nombre de contraintes est fini.

Conclusion

Nous avons établi dans ce mémoire plusieurs algorithmes pour la résolution de problèmes de programmation convexe. La méthode des ellipsoïdes inscrits a été décrite pour des problèmes de programmation convexe et nous avons calculé le nombre d'itérations nécessaires. Nous avons alors développé un algorithme général pour un problème de programmation semi-infinie convexe, sa convergence a été démontrée et nous en avons déduit plusieurs algorithmes faisant intervenir les centres. Ces centres, nous les avons classés en deux types :

- le centre elliptique et le centre sphérique,
- le centre analytique avec ou sans poids.

Le premier chapitre a été consacré à l'étude du premier type de centres pour un corps convexe, les propriétés telles que leur existence et unicité, l'existence d'ellipsoïdes maximaux et γ -maximaux ont été démontrées. Nous avons alors introduit la notion du γ -centre, variante du centre elliptique très importante dans ce mémoire (le centre elliptique est difficile à calculer (raisons numériques) alors que le calcul du γ -centre l'est moins). Nous avons également considéré différents problèmes de recherche d'ellipsoïdes indispensables pour les définitions de centre elliptique, de γ -centre et avons démontré certaines équivalences permettant des réductions. Un de ces problèmes, la recherche d'un ellipsoïde γ -maximal pour le polytope Q à intérieur non vide

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i^T x \leq 1, \ i = 1, \dots, m\}$$

a été la base d'un algorithme appelé l'algorithme **Ellip** pour trouver le γ -centre de Q . Nous en avons alors démontré la convergence.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'étude du centre analytique avec ou sans poids. Nous avons alors démontré l'existence et l'unicité du ω -centre noté \bar{x} (il s'agit du centre analytique avec poids), les conditions nécessaires et suffisantes pour le trouver, l'existence d'ellipsoïdes centrés en \bar{x} intérieur et extérieur à un polytope X défini par m inégalités linéaires

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

avec A une matrice $m \times n$, $m \geq n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Le centre analytique étant un cas particulier du ω -centre (le vecteur poids est le vecteur $(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})^T \in \mathbb{R}^m$ pour le centre analytique), nous avons adapté les différentes propriétés en sachant la forme spéciale du poids. Nous avons alors conçu un algorithme permettant de trouver le centre analytique d'un polytope et en avons compté les opérations arithmétiques.

Il serait bon d'ajouter à ce mémoire, les différents points suivants :

- La réduction entre les deux problèmes I et I_0 , $I \implies I_0$ (si elle existe.)
- L'extension des notions de centre à une partie G de \mathbb{R}^n autre qu'un corps convexe.
- L'application des différentes notions au problème non différentiable.
- Le calcul du nombre d'itérations de l'algorithme général (utilisé dans le cas de la programmation semi-infinie convexe).
- L'implémentation de l'algorithme général et son utilisation dans les cas particuliers où l'itéré est soit le centre sphérique, soit le centre elliptique, soit le ω -centre, soit le centre analytique. Le centre analytique peut être trouvé grâce à l'algorithme donné au chapitre 2, le γ -centre, quant à lui, peut être calculé grâce à l'algorithme ElliP donné au chapitre 1.

Le recherche de la méthode la moins coûteuse parmi toutes celles-ci et la comparaison de ces méthodes avec les méthodes classiques de résolution de problème de programmation convexe (dualité lagrangienne).

Bibliographie

- [1] D. DEN HERTOOG, J. KALISKI, C. ROOS, and T. TERLAKY. A note on central cutting plane methods for convex programming. *Report 93-44*, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, 1993.
- [2] S. P. TARASOV, L. G. KHACHIYAN, and I. I. ÈRLIKH. The method of inscribed ellipsoids. *Soviet Math Doklady* 37:226–230, 1988.
- [3] L. G. KHACHIYAN and M. J. TODD. On the complexity of approximating the maximal inscribed ellipsoid for a polytope. *Mathematical Programming*, 61:137–159, North-Holland, 1993.
- [4] P. M. VAIDYA. A locally well-behaved potential function and a simple newton-type method for finding the center of a polytope. *AT and T Bell Laboratories*, Murray Hill, New Jersey.
- [5] F. JOHN. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. *COURANT Anniversary Volume*, pages 197–199, 1948.
- [6] K. O. KORTANEK and HOON NO. A central cutting plane algorithm for convex semi-infinite programming problems. *SIAM J. Optimization*, 3:901–918, 1993.
- [7] L. DANZER, D. LAUGWITZ, and H. LENZ. über das lownersche ellipsoid und seine analogen unter den einem eikörper einbeschriebnen ellipsoiden. *Archiv der Mathematik (Basel)* 8, pages 214–219, 1957.
- [8] D.M. TITTERINGTON. Optimal design: some geometric aspects of d-optimality. *Biometrika* 62, pages 313–320, 1975.
- [9] R.M. FREUND . Projective transformations for interior-point methods. part ii : Analysis of an algorithm for finding the weighted center of a polyhedral system. *Working paper OR 180-88*, Operations Research Center, M.I.T., Cambridge, MA., 1988.